This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

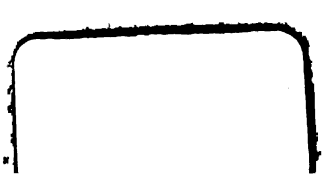
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

3 3433 06908273 7



TRAITÉ
DU
CALCUL INTÉGRAL,

POUR SERVIR DE SUITE

A L'ANALYSE DES INFINIMENT-PETITS

DE M. LE MARQUIS DE L'HOPITAL;

Par M. DE BOUGAINVILLE, de la Société Royale de Londres.

SECONDE PARTIE.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK

A PARIS,

Chez H. L. GUERIN & L. F. DELATOUR,

rue Saint Jacques, à Saint Thomas d'Aquin.

M. DCC. LVI.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

ПРАВА
МВПС
ЗАБРАНЕНО

AVANT-PROPOS.

JE m'acquitte avec autant d'empreſſement que de reconnoiſſance de mes engagements envers le Public. L'accueil favorable qu'il a fait à la premiere partie de cet Ouvrage, m'a ſoutenu contre les difficultés que préſentoit l'exécution de la ſeconde. L'eſpoir du ſuccès m'animoit. J'avois au moins un gage certain de l'indulgence de ~~mes~~ Juges.

Dans la premiere partie j'ai expoſé les regles pour l'intégration des différentielles qui n'ont qu'une ſeule variable, ou changeante; celle-ci explique les méthodes connues pour intégrer les différentielles qui en contiennent deux, ou un plus grand nombre. Je la diviſe en deux Sections, dont l'une a pour objet celles de ces différentielles qui ſont du premier ordre, & l'autre celles qui ſont d'un ordre plus élevé.

De toutes les méthodes inventées pour éclaircir ces matieres obſcures & compliquées, celles qui embraſſent un plus grand nombre de cas ſont, ſans contredit, les plus utiles. C'eſt à développer les plus générales de ces méthodes, à en faire voir l'application à des cas éloignés

& qui y paroiſſent le moins réductibles, que je me ſuis ſur-tout attaché. Pour épargner aux commençants des eſſais qui, toujours pénibles, ſeroient ſouvent infructueux à l'égard de quantités & d'équations qui ne peuvent être intégrées ſans préparation, j'ai placé à la tête de cette ſeconde partie l'expoſition du Théorême qui apprend à reconnoître quand l'intégration directe eſt poſſible, ou non. J'ai donné à l'expoſition de ce Théorême toute l'étendue néceſſaire pour ne laiſſer, je crois, aucun embarras ſur la maniere de s'en ſervir ; & dans toute la ſuite de l'Ouvrage j'en fais un uſage preſque continuel.

La méthode développée dans le Chap. VII. de la premiere Section eſt auſſi d'une très-grande généralité. On verra que la difficulté d'intégrer pluſieurs équations ſe réduit ſouvent à les ramener au cas dans lequel la méthode du Chapitre VII. ſuppoſe les équations différentielles pour les intégrer. Celle du Chapitre XV. de la même Section eſt auſſi une des plus ingénieuſes & des plus fécondes ; d'autant mieux que M. d'Alembert à qui nous la devons, ainſi que preſque la moitié des méthodes contenues dans ce Volume & dans le précédent, l'a étendue aux différentielles d'un ordre quelconque.

La plûpart de ces méthodes ſont dans les volumes de 1746, 1748, 1750 des Mémoires de l'Académie de Berlin.

J'ai trouvé, dans la ſeconde Section, l'occaſion de faire voir par un exemple, comment deux méthodes, rapprochées l'une de l'autre, ſe prêtent un jour mutuel & acquierent quelquefois un degré d'évidence & de généralité que les inventeurs ne leur avoient pas donné. Il y a toujours à gagner à ces ſortes de combinaiſons ; puiſque ſouvent, même en manquant le but qu'on ſe propoſe, on trouve une vérité qu'on ne cherchoit pas. D'ailleurs ces méthodes qui tendent à la même fin, qui ſont fondées ſur les mêmes principes, qui preſque toutes ont les mêmes procédés, ont néceſſairement entre elles un rapport ſenſible. Peut-être à force d'en étudier la liaiſon & d'en chercher la dépendance réciproque, parviendroit-on à rendre l'inſtrument univerſel & en même temps plus ſimple.

Que ne pouvons-nous pas nous promettre à cet égard des travaux réunis & conſtants de pluſieurs Géometres du premier ordre, dont les pas ont déja franchi un eſpace immenſe ? Le Public attend avec impatience le Traité du Calcul Intégral de M. Fontaine. Son but eſt

de réduire tout ce Calcul à une regle fondamentale & générale. Les eſſais de ce Traité qui ont déja été lus à l'Académie des Sciences & dont l'Hiſtoire de cette Académie (Année 1742.) fait mention, mettent en droit d'eſpérer tout de l'Ouvrage même.

SUPPLÉMENT
A LA PREMIERE PARTIE.

COmme on m'a fait appercevoir dans la premiere partie de cet Ouvrage quelques endroits qui n'avoient pas, pour tout le monde, ce degré de clarté que je m'étois propoſé de leur donner; & qu'on m'en a indiqué d'autres, où le calcul pouvoit être ſimplifié; je vais éclaircir & réformer ces endroits, & corriger en même temps les fautes d'impreſſion dont j'ai pu m'appercevoir. Je ſuivrai dans ce Supplément l'ordre des pages.

PAGE 11. LIGNE 15. Placez la lettre *O* à l'angle des aſymptotes, & nommez: OC, x, au lieu de BC.

Page 15. *ligne* 1. $\frac{dx}{y} = y$, liſez $\frac{dx}{x} = dy$.

Page 21. *ligne* 10. $y^z dz lx ly =$, liſez $y^z dz lx ly +$.

Page 35. *Lemme* 6. La ſuppoſition faite dans la démonſtration de ce Lemme, que $1 - 2ax + xx = 0$, $1 - 2bx + xx = 0$, &c. pourroit faire naître quelques difficultés. Quoique la vérité du Lemme n'en ſubſiſtât pas moins, il eſt cependant à propos de montrer comment on peut ſe paſſer de cette ſuppoſition.

Soient donc $a, b, -h$, &c. les coſinus des arcs AB, AF, AI, &c. $a, b, -h$ ſeront les différentes valeurs

de c dans les équations aux cosinus, trouvées p. 31. Donc ces équations auront pour diviseurs $c-a$, $c-b$, $c+h$, &c.

Supposons ces équations multipliées par 2, & faisons $2c=u$; les transformées qui en naîtront, auront pour diviseurs $u-2a$, $u-2b$, $u+2h$, &c. Or on sait que si dans chacune de ces transformées on substitue à u une quantité quelconque P, la quantité dans laquelle chacune d'elles se change par cette substitution a pour diviseurs $P-2a$, $P-2b$, $P+2h$. Donc si à u on substitue $\frac{1+xx}{x}$, les transformées qu'on aura dans ce cas auront pour diviseurs $\frac{1+xx}{x}-2a$, $\frac{1+xx}{x}-2b$, $\frac{1+xx}{x}+2h$, &c. Maintenant en faisant le calcul, on verra facilement que la forme générale de ces transformées est, $\frac{1\pm 2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}}{x^{\lambda}}$. Donc $\frac{1\pm 2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}}{x^{\lambda}} =$ $(\frac{1+xx}{x}-2a).(\frac{1+xx}{x}-2b).(\frac{1+xx}{x}+2h.$ &c. $=$ $\frac{(1+xx-2ax).(1+xx-2bx).(1+xx+2hx).\text{ &c.}}{x^{\lambda}}$. Donc enfin $1\pm 2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}=(1-2ax+xx).(1-2bx+xx).(1+2hx+xx).$ &c. $=\overline{KB}^{2}\times\overline{KF}^{2}\times\overline{KI}^{2}\times$ &c.

Page 38. *ligne* 2. AF, lisez AE.

Ibid. *ligne* 17. Lisez $\sqrt{1+2hx+xx}$, au lieu de $\sqrt{1+hx+xx}$.

Page 42. *ligne* 17. $\frac{AdA+BdB}{AA+BB}\times$, lisez $\frac{AdA+BdB}{AA+BB}+$:

Page 43. *ligne* 16. $\int h\times\frac{ada-bdb}{aa+bb}$, lisez $\int h\times\frac{ada+bdb}{aa+bb}$.

Page

Page 46. *ligne* 7. Comme 9 eſt à 1 : *liſez*, comme g eſt à 1.

Ibid. *ligne* 15. *juſqu'à* 21 : *pour plus de clarté* : *liſez ce qui ſuit* : $s\sqrt[10]{-1} = s\overline{\sqrt{-1}}^{\frac{1}{5}}$. Or cette derniere quantité ſe rapporte à $\overline{a+b\sqrt{-1}}^{g+h\sqrt{-1}}$, en faiſant $a=0$, $b=s$, $g=\frac{1}{5}$, $h=0$. Donc (LXX. n°. 4.) $s\sqrt[10]{-1}$ ſe rapporte à $A+B\sqrt{-1}$, & par conſéquent auſſi $r+s\sqrt[10]{-1}$.

Page 51. *ligne* 18. $+y$: *liſez* $+y^m$.

Page 80. *ligne* 16. au lieu de fy : *liſez*, gy.

Ibid. *ligne* 22. $\frac{2gz}{g-2z}$ ou bien, &c. *liſez* $\frac{gg}{g-2z}$ ou bien $\frac{2gz}{g-2z}$.

Page 102. *ligne pénultieme*. $-(X)$: *liſez* $+(X)$.

Page 117. *ligne* 14. Il eſt évident, &c. *liſez*, Il eſt évident qu'on aura toujours un triangle rectangle, dont les côtés autour de l'angle droit ſeront dx & dy, & dont l'hypotenuſe ſera du.

Page 121. *ligne* 26. *liſez*, d'un quadrilatere d'hyperbole équilatere par rapport à ſes aſymptotes : les coordonnées ayant leur origine à la diſtance 1 du ſommet.

Page 129. *ligne* 20. un nombre entier poſitif : *liſez*, un nombre entier pair poſitif.

Page 133. *ligne* 11. $\frac{-z^m dz}{rr(zz+rr)}$, *liſez* $\frac{-z^m dz}{rr(zz+\frac{1}{rr})}$.

Page 152. *ligne* 5. $\frac{(f+fa-g)}{b-a}$: *liſez* $(f+\frac{fa-g}{b-a})$.

Page 159. *ligne* 14. la fonction de x : *liſez*, le coefficient de x.

Page 171. *ligne* 11. $Gz^r\,dx$: *liſez*, $Gz^r\,dz$.

Ibid. *ligne* 18. *liſez*, s étant un nombre impair poſitif ou négatif; & cette quantité s'intégrera, ou abſolument, quand s eſt poſitive (Art. CVI. n°. 1.), ou par la quadrature du cercle (Art. CVI. n°. 2.), lorſque s eſt négative.

Page 180. *On peut ſupprimer depuis la ligne* 4 *incluſivement, juſqu'à la ligne* 7 *excluſivement.*

Page 181. *ligne* 15. $1+x=$ &c. *liſez* $1+x^\lambda =$.

Page 199. *ligne* 8 *&* 9. demi-axe conjugué : *liſez* axe conjugué.

Page 204. *ligne* 14. $=$ enfin $\frac{-bb\,du}{u\sqrt{u}\cdot\sqrt{uu\pm fu-bb}}$. Pour montrer clairement ce qui a pu conduire à ajouter à la différentielle ce qu'on lui a ajouté, mettons-la ſous cette forme $-\frac{\frac{bb\,du}{uu}}{\sqrt{u\pm f-\frac{bb}{u}}}$; il eſt facile de voir que $\frac{bb\,du}{uu}$ eſt la différentielle du terme $-\frac{bb}{u}$ qui eſt ſous le ſigne. Donc il ne manque que du dans le numérateur, pour que la différentielle ſoit complete. Donc au lieu de notre différentielle nous pourrons prendre la ſuivante, $-\frac{du+\frac{bb\,du}{uu}}{\sqrt{u\pm f-\frac{bb}{u}}}+\frac{du}{\sqrt{u\pm f-\frac{bb}{u}}}$. La premiere partie a pour intégrale (Art. VIII.) $-2\sqrt{u\pm f-\frac{bb}{u}}$, ou $-\frac{2\sqrt{uu\pm fu-bb}}{\sqrt{u}}$. La ſeconde n'eſt autre choſe que $\frac{-du\sqrt{u}}{\sqrt{uu\pm fu-bb}}$, qui ſe rapporte à l'Article CCVI.

Page 220. *ligne* 3. eſt égal à celle de : *effacez* celle de.

Page 224. *ligne* 1. *changez le double ſigne* $\pm$ *en* $\mp$.

Page 227. *ligne* 16. On aura une différentielle, &c. C'eſt ce qu'on peut voir de la maniere ſuivante. Puiſque $f + gx + hxx + x^3 = (k + lx + mx^2).(c \pm x)$, en faiſant $c \pm x = z$, on aura une transformée de cette forme $[a.(\pm z \mp c) + b]^p \times \pm z^{\frac{n}{2}}\, dz \times (k' + l'z + mz^2)^{\frac{n}{2}}$; donc, &c.

Page 231. *ligne* 2. & $xx =$ &c. On peut ſimplifier ce calcul de la façon ſuivante. Subſtituez la valeur de x, qui vient d'être trouvée, dans l'équation $g'zx + \delta z = g + lx + kx^2$ & vous aurez tout de ſuite $g + lx + kxx = \delta z + g'z \times \left\{\frac{g'z-l}{2k} \pm \sqrt{\frac{\delta z - g}{k} + \left(\frac{g'z-l}{2k}\right)^2}\right\}$, d'où l'on tire immédiatement le dénominateur $\sqrt{\varphi + \frac{1}{z}} \times \left\{\delta z + g'z\left(\frac{g'z-l}{2k}\right) \pm \sqrt{\frac{\delta z - g}{k} + \left(\frac{g'z-l}{2k}\right)^2}\right\}$; réduiſant, &c. *comme juſqu'à la ligne* 10, je multiplie &c. On peut ſe diſpenſer de cette opération, parce que le numérateur & le dénominateur ſont chacun diviſibles par la quantité qui multiplie $\frac{dz}{k}$, ce qui conduit ſur le champ à $\frac{\mp dz}{\sqrt{z}.\sqrt{}\text{ &c.}}$, *ligne* 12. *page ſuivante.*

Quant à la remarque qui ſuit, page 233, on peut trouver auſſi facilement, ſans le ſecours du calcul qui précede, que la propoſée ſe rapporte aux logarithmes, toutes les fois que $\delta\delta - \frac{\delta g' l}{k} + \frac{gg'g'}{k} = 0$. Car il eſt ſûr que la propoſée ſe réduira aux logarithmes, lorſque $g'x + \delta$ ſera

diviſeur de $g+lx+kx^2$. Suppoſant dónc qu'il le ſoit, & faiſant la diviſion, juſqu'à ce qu'il n'y ait plus d'x au dividende, on trouvera, en égalant le reſte à zéro & en réduiſant, $\delta\delta - \frac{\delta g' l}{k} + \frac{gg'g'}{k} = 0$.

Page 234. *ligne* 17. eſt du troiſieme degré: *liſez*, eſt 3.

Page 235. *ligne* 20. Les quadratures de ces quatre équations: *liſez*, les quadratures des courbes repréſentées par ces quatre équations.

Ibid. *ligne* 23. ſa quadrature ſe réduira: *liſez*, la quadrature de cette courbe ſe réduira.

Page 237. *ligne* 14. $dx = y\,du$, effacez $dx =$.

Ibid. *ligne* 15. Faites ainſi, pour plus de ſimplicité, le calcul ſuivant. Je multiplie la différentielle $\frac{du\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}{\sqrt{u}}$ haut & bas par $4\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}$. & j'ai $\frac{4k\,du+4l\,u\,du+4mu^2\,du+4nu^3\,du}{4\sqrt{k+lu^2+mu^3+nu^4}}$, ou bien $\frac{k\,du+2l\,u\,du+3mu^2\,du+4nu^3\,du}{4\sqrt{ku+lu^2+mu^3+nu^4}} + \frac{3k\,du+2l\,u\,du+mu^2\,du}{4\sqrt{ku+lu^2+mu^3+nu^4}}$. Il eſt évident que la premiere partie a pour intégrale $\frac{\sqrt{ku+lu^2+mu^3+nu^4}}{2}$. A l'égard de la ſeconde, elle ſe réduit à trois autres, dont la premiere qui a pour numérateur $3\,k\,du$ s'integre par les ſections coniques, en faiſant $u = \frac{1}{z}$. La ſeconde qui ſe réduit à $\frac{l\,du\sqrt{u}}{2\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}$ eſt de la forme de celle dont nous cherchons l'intégrale; & la troiſieme ſe réduit à $\frac{mu\,du}{4\sqrt{\frac{k}{u}+l+mu+nu^2}}$, à laquelle, après l'avoir miſe ſous cette forme,

$\frac{m}{8n} \cdot \frac{2nu\,du}{\sqrt{\frac{k}{u} + l + mu + nu^2}}$, on voit qu'il ne manque pour être une différentielle complete, que d'avoir à ſon numérateur $-\frac{k\,du}{uu} + m\,du$. Cette troiſieme partie ſe réduira donc, pour ſon intégration, à l'intégrale $\frac{m}{4n}\sqrt{\frac{k}{u} + l + mu + nu^2}$, à la différentielle $\frac{\frac{m}{8n} \cdot k\,du}{u\sqrt{u} \cdot \sqrt{k + lu + mu^2 + nu^3}}$, qui ſe rapporte aux ſections coniques en faiſant $u = \frac{1}{z}$; & enfin à la différentielle $\frac{-\frac{m^2}{8n} \cdot du\sqrt{u}}{\sqrt{k + lu + mu^2 + nu^3}}$, de la même forme que celle dont nous cherchons l'intégrale.

Donc la différentielle $\frac{du\sqrt{k + lu + mu^2 + nu^3}}{\sqrt{u}}$ eſt compoſée de deux parties qui s'integrent abſolument, de deux parties dépendantes des ſections coniques, & enfin de $\left(\frac{l}{2} - \frac{mm}{8n}\right) \cdot \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{k + lu + mu^2 + nu^3}}$. Donc l'intégrale de $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{k + lu + mu^2 + nu^3}}$ dépend de celle de $\frac{du\sqrt{k + lu + mu^2 + nu^3}}{\sqrt{u}}$, c'eſt-à-dire, de la quadrature d'une courbe du troiſieme ordre.

Page 241. *ligne derniere* : d'une quadrature du troiſieme ordre : *liſez*, de la quadrature d'une courbe du troiſieme ordre.

Page 244. *ligne* 3. xx : liſez, x.

Page 246. *ligne* 14. $2xxdx$: liſez, $2cxdx$.

Page 248. *ligne* 17. elle ne dépend pas toujours de

$\frac{dx}{x\sqrt{a+fx^3}}$: mais elle peut dépendre ou de $\frac{x^2dx}{\sqrt{a+fx^3}}$, ou de $\frac{xdx}{\sqrt{a+fx^3}}$, ou de $\frac{dx}{\sqrt{a+fx^3}}$, ou enfin de $\frac{dx}{x\sqrt{a+fx^3}}$. Dans le premier cas elle s'integre exactement. Dans le ſecond & le troiſieme elle dépend des ſections coniques.

Page 253. *ligne* 7. fonctions de x : *liſez*, de z.

Page 259. *ligne* 6. au dénominateur $\sqrt{\varphi A+Bu}$ &c. : liſez $\sqrt{A+Bu}$ &c.

Page 277. *ligne* 3. $x^3=\frac{az-g}{z^3}$ donne, &c. Le calcul qui ſuit peut s'abreger en cette maniere ; $x^3=\frac{az-g}{z^3}$ donne $x^2dx=\frac{-2azdz+3gdz}{3z^4}$; donc $x^2zdx=\frac{-2azdz+3gdz}{3z^3}$; *ce qui intégré conduit tout de ſuite à la ligne* 7.

Ibid. *ligne* 22. Ay, liſez Ay^λ.

Page 292. *ligne* 10. Si l'on avoit $\int(rdx\int udx)$: *ajoutez ces mots* : r & u étant des fonctions quelconques de x.

Ibid. *ligne* 15. *en titre*, SECOND CAS ; *effacez ce titre & les deux lignes qui ſuivent. Liſez à la marge :* Autre exemple du premier cas ; *& au lieu de* $\int(dx)\times\left(\int\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}\right)^3$, liſez $\int\left\{dx\left(\int\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}\right)^3\right\}$ *dans cet article & le ſuivant.*

Page 294. *Art.* CCCII. *juſqu'à la ligne* 14 : *liſez ce qui ſuit.* Soit propoſée $\int\left\{dx\left(\int\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}\right)^3\right\}$; $\int\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}$ eſt l'expreſſion d'un arc de cercle dont x eſt le ſinus verſe & r le rayon : Soit, en ſuppoſant le rayon 1, z la valeur de cet arc ; rz ſera ſa valeur, le rayon étant r. De même ſi cof. z repréſente le coſinus de cet arc, le rayon étant

1, r cos. z repréſentera le coſinus du même arc, le rayon étant r. On aura donc $x = r - r$ cos. z ; or cos. $z =$ &c.

Au reſte il eſt bon de marquer en paſſant la différence de ces deux expreſſions r cos. z & cos. rz. La premiere exprime le coſinus de l'arc z pris dans un cercle dont le rayon eſt r ; la ſeconde repréſente le coſinus d'un arc, le nombre de fois r plus grand que z, les arcs rz & z étant pris dans le même cercle ; d'où l'on voit que r cos. z & cos. rz ſont deux expreſſions qu'il ne faut pas confondre.

Page 296. ligne derniere. Entre l'article CCCV. *qui termine cette page & l'article* CCCVI. *qui commence la ſuivante, inſérez ces mots :*

SECOND CAS.

Ce ſecond cas a lieu, quand les quantités affectées du ſigne $\int$ ſont multipliées les unes par les autres. Il n'a aucune difficulté. Prenez chaque intégrale en particulier, & multipliez-les enſuite entre elles, le produit ſera la valeur de l'expreſſion propoſée. Ainſi $\int(x\,dx) \times \int(g x^3 dx) = \frac{x^2}{2} \times \frac{g x^4}{4} = \frac{g x^6}{8}$.

Page 316. ligne 20. ajoutez ce qui ſuit. On peut par le même Théorême transformer tout nombre irrationel donné en une ſuite infinie de termes purement rationels. Soit, par exemple, la quantité irrationelle $\sqrt{10}$, je la transforme en $\sqrt{9+1}$, c'eſt-à-dire, en un radical binome dont la premiere partie ſoit un quarré ; & alors élevant par le moyen de la formule le binome $9+1$ à la puiſſance

$\frac{1}{2}$, on aura une ſuite infinie de termes tous rationels.

Page 324. *ligne* 18. d'un nombre plus grand que l'unité. *Entre cette ligne & l'Art.* CCCXL, *ajoutez* : mais moindre que 2. En effet ſi $1+z$ étoit ſeulement égal à 2, alors z étant 1, les deux termes du dénominateur binome ſeroient égaux & la ſerie ſeroit fautive; à plus forte raiſon, lorſque z ſurpaſſe 2.

On peut néanmoins employer cette ſerie à trouver les logarithmes des nombres plus grands que l'unité; mais il faut pour cela calculer les logarithmes de nombres moindres que 2, & qui ſoient tels que, multipliés entre eux, ou diviſés les uns par les autres, ils produiſent le nombre dont on cherche le logarithme. Par exemple, ſachant que $\frac{\frac{12}{10}\times\frac{12}{10}}{\frac{8}{10}\times\frac{9}{10}}$, ou bien $\frac{1,2\times 1,2}{0,8\times 0,9} = 2$, je calcule par le moyen de la premiere ſerie le logarithme de 1, 2 en ſuppoſant $z = 0,2$. Je calcule pareillement les logarithmes de 0, 8 & 0, 9 par le moyen de la ſeconde formule en ſuppoſant $z = 0,2$ pour l'un, & 0, 1 pour l'autre. J'ajoute les logarithmes trouvés de 0, 8 & 0, 9 & je retranche la ſomme du double du logarithme de 1, 2, ce qui donnera le logarithme de 2. Si on ſe donne la peine de faire ce calcul, on trouvera ce logarithme $=$ 0, 693147180559 &c. De même puiſque $\frac{2\times 2\times 2}{0,8} = 10$, en triplant le logarithme que nous venons de trouver, & retranchant celui de 0, 8, on aura le logarithme de 10 exprimé par 2. 302585092994 &c. C'eſt

ce

ce que (page 10. Art. XV.) nous avions promis de donner.

Lorſque par ce moyen on a formé les logarithmes de quelques nombres, on peut enſuite avoir ceux des autres nombres d'une maniere plus expéditive. La méthode conſiſte à trouver le logarithme d'une fraction dont le numérateur ſurpaſſe le dénominateur de tel nombre d'unités qu'on voudra. Pour cet effet, ſoit a la ſomme du numérateur & du dénominateur de cette fraction, x leur différence; la fraction ſera $\frac{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}x}$, ou $\frac{a+x}{a-x}$. La différentielle du logarithme de cette fraction ſera $\frac{2adx}{aa-xx}$; laquelle réduite en ſerie par la diviſion & enſuite intégrée, donne pour le logarithme de cette même fraction $2\times\left\{\frac{x}{a}+\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}+\frac{x^7}{7a^7}+\frac{x^9}{9a^9}+\text{&c.}\right\}$: intégrale à laquelle il n'y a point de conſtante à ajouter, parce que quand $x=0$, elle devient $=0$, ainſi que cela doit être. Car lorſque $x=0$, la fraction $\frac{a+x}{a-x}$ devient $\frac{a}{a}=1$, dont le logarithme eſt ici $=0$.

Maintenant s'il s'agit de trouver le logarithme d'un nombre quelconque a, celui d'un autre nombre b étant donné; je chercherai par cette formule le logarithme de la fraction $\frac{a}{b}$, ſi a eſt plus grand que b, ou $\frac{b}{a}$, s'il eſt plus petit: ce logarithme étant trouvé, je l'ajouterai dans le premier cas au logarithme ſuppoſé connu de b, & j'aurai le logarithme de $\frac{a}{b}\times b$; c'eſt-à-dire de a. Dans le ſecond cas je retrancherai du logarithme connu de b, celui de la fraction $\frac{b}{a}$, & j'aurai le logarithme de $\frac{b}{\frac{b}{a}}=b\times\frac{a}{b}=a$.

Au reſte, il ne faut pas perdre de vue que les logarithmes dont nous parlons ici, ſont les logarithmes hyperboliques; & que pour réduire à ceux des tables ordinaires les logarithmes trouvés par les moyens que nous venons d'indiquer, il faut multiplier ces derniers par le nombre conſtant 0, 43429448 &c. La raiſon en eſt que les logarithmes d'un même nombre pris dans différentes logarithmiques ſont entre eux comme les ſous-tangentes de ces logarithmiques. Or les logarithmes appellés hyperboliques, ſont ceux que donneroit la logarithmique dont la ſous-tangente $= 1$, & ceux des tables appartiennent à une logarithmique dont la ſous-tangente $= 0, 43429448$ &c. Donc ſi en général on nomme l le logarithme hyperbolique d'un nombre donné; L ſon logarithme pris dans les tables ordinaires, on aura $1 : 0, 43429448$ &c. $:: l : L$. Donc $L = l \times 0, 43429448$ &c.

Par une méthode ſemblable à celle que nous venons d'employer pour trouver le logarithme du nombre $1 + z$, on peut parvenir à trouver l'expreſſion générale de c^x, (c étant le nombre dont le logarithme eſt 1, & x une quantité quelconque). On ſuppoſera pour cet effet $c^x = 1 + z$; donc $x = l(1 + z)$ & conſéquemment $x = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}$ &c.; équation de laquelle tirant, par la méthode inverſe des ſeries, la valeur de z en x, on aura $z = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}$ &c. donc $1 + z$ ou $c^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} +$ &c.

Je remarquerai ici que cette expreſſion trouvée pour c^x démontre ce que nous avons ſuppoſé dans la premiere Partie (Art. CCCVII.), ſavoir que $c^{z\sqrt{-1}} = 1 + z\sqrt{-1}$ lorſque z eſt très-petite.

J'obſerverai encore qu'on peut par ce moyen trouver la valeur de c. En effet puiſque $c^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} +$ &c. en ſuppoſant $x = 1$, on a $c = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} +$ &c. $= 2,7182818$ &c.

EXTRAIT DES REGISTRES de l'Académie Royale des Sciences,

Du 14 Janvier 1756.

NOUS Commiſſaires nommés par l'Académie, avons examiné la ſeconde Partie de l'Ouvrage de Monſieur de Bougainville le jeune, qui a pour titre : *Traité du Calcul intégral.*

Cette ſeconde Partie traite de l'Intégration des Quantités différentielles à deux ou pluſieurs variables, & acquitte par conſéquent l'engagement que l'Auteur avoit pris avec le public. Elle eſt diviſée en deux livres.

Le premier a pour objet l'intégration des Différentielles du premier ordre, qui contiennent deux ou pluſieurs variables. M. de Bougainville après quelques Définitions & Propoſitions préliminaires, traite d'abord de l'intégration des quantités ou équations différentielles qui n'ont beſoin pour cela d'aucune préparation ; il donne le moyen de connoître & de diſtinguer ces ſortes de quantités ou équations, & de les intégrer. Il paſſe enſuite à l'intégration des équations qui ont beſoin d'être préparées par quelque opération particuliere ; & comme pour l'ordinaire, cette opération conſiſte à ſéparer les Indéterminées, M. de Bougainville, après avoir enſeigné à conſtruire une Equation différentielle dont les indéterminées ſont ſéparées, donne différentes méthodes pour ſéparer les indéterminées dans une Equation propoſée, ſoit par la voie des multiplications & des diviſions, ſoit par celle des transformations. Le premier uſage qu'il en fait, a pour objet les Equations homogenes, & après avoir montré comment on peut conſtruire ces équations dans tous les cas, il

enſeigne comment on peut réduire pluſieurs Equations au cas de l'homogénéité.

Il paſſe de là à l'intégration d'une eſpece d'Equations qui a ſouvent lieu dans la ſolution des Problêmes ; c'eſt celle dont M. Bernoulli a donné le premier l'Intégrale dans les Journaux de Leipſic de 1697. M. de Bougainville, après avoir donné une méthode particuliere d'intégrer ces ſortes d'Equations, fait voir comment on peut y réduire un grand nombre d'Equations propoſées. Ces principes établis, il traite en général des équations à trois & quatre termes, & montre dans quels cas on peut les intégrer. Il n'oublie pas la fameuſe équation de *Ricati*, ni même des équations plus compliquées, dont celle de *Ricati* n'eſt qu'un cas.

De là il paſſe à l'intégration des Equations où les deux différentielles ſont élevées à différentes puiſſances ; le cas des Equations homogenes ſe retrouve encore ici, mais ſous une forme bien plus générale. M. de Bougainville montre de plus comment on peut intégrer dans beaucoup d'autres cas les Equations dans leſquelles les deux différentielles ſe trouvent mêlées enſemble, ou élevées à des puiſſances plus grandes que l'unité.

L'Auteur fait voir enſuite comment on peut employer dans certains cas la méthode des Coefficients indéterminés pour intégrer en même temps pluſieurs équations qui contiennent chacune un certain nombre de variables ; & comment on peut ſe ſervir de cette même méthode pour déterminer une Intégrale par certaines conditions données de la Différentielle.

Le ſecond Livre traite de l'intégration des Equations où quantités différentielles à pluſieurs variables, du ſecond ordre & au-delà, en ſuppoſant conſtante telle différentielle qu'on juge à propos. Il contient, ainſi que le Livre premier, toutes les méthodes que les Géometres ont trouvées juſqu'à préſent ſur le Calcul qui en eſt l'objet ;

l'Auteur ſait par-tout ſe rendre propres ces méthodes par l'intelligence & la clarté avec laquelle il les a développées.

Cette Seconde Partie ne nous paroît pas moins digne que la premiere de l'approbation de l'Académie, & de l'impreſſion. *Signé*, NICOLE; D'ALEMBERT.

Je certifie le préſent Extrait conforme à ſon original & au jugement de l'Académie. A Paris, ce 29 Janvier 1756.

GRANDJEAN DE FOUCHY,
Secretaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

Fautes à corriger dans la Seconde Partie.

Page 19. ligne 24. $\frac{dC}{dx} \times \frac{dB}{dz}$, liſez $\frac{dC}{dx}, \frac{dB}{dz}$.

Page 58. ligne 6. $byyx^{\frac{1}{2}}$, liſez $byyx^{\frac{1}{2}}dx$.

Page 116. & 117. effaçez V^{-1} & V''^{-1}.

Page 154. ligne 15. $\pm nyydx^2$, liſez $\pm n$.

Page 155. ligne 1. $\pm ndx^2$, liſez $\pm n$; *idem* ligne 8.

N'ayant pu revoir moi-même les épreuves de cette ſeconde Partie, à cauſe d'un voyage que j'ai été obligé de faire & d'une maladie aſſez longue qui l'a ſuivi, je m'en ſuis repoſé ſur l'exactitude de M. Bezout, Cenſeur Royal & très-habile Maître de Mathématiques, qui a bien voulu s'en charger. Ceux qui voudront s'inſtruire à fonds du Calcul intégral & de la Géométrie tranſcendante, ne ſauroient mieux faire que de le prendre pour guide.

TRAITÉ

TRAITÉ
DU
CALCUL INTÉGRAL.

SECONDE PARTIE,

Où l'on traite de l'Intégration des Différentielles à deux ou pluſieurs variables.

Nous avons donné dans la premiere partie de ce Traité les regles que les Géometres ont trouvées juſqu'à préſent pour intégrer les différentielles qui n'ont qu'une variable. Nous allons expoſer dans cette ſeconde partie ce que l'on ſait ſur l'intégration de celles qui en contiennent deux ou un plus grand nombre.

Nous diviſerons cette ſeconde partie en deux Sections.

Diviſion générale de cette Seconde Partie.

La Premiere contiendra les regles d'intégration des différentielles à pluſieurs variables qui ne paſſent pas le premier ordre ; telles que ſont les ſuivantes, $xydx + xxdy$; $\frac{xdy - ydx}{xx}$, &c.

LA SECONDE traitera de l'intégration des différentielles à pluſieurs variables d'un ordre plus élevé ; telles que $xdxddy$; $y^3x^3dydyddx$, &c. qui s'écrivent encore de la façon ſuivante, $xdxd^2y$; $y^3x^3dy^2d^3x$, & en général $dx^n d^m y$.

Obſervation ſur l'addition de la conſtante à l'intégrale trouvée.

Il ne faut pas oublier qu'il eſt auſſi néceſſaire ici d'ajouter une conſtante à l'intégrale trouvée, pour la rendre complette, ainſi qu'on l'a fait dans la premiere Partie. Nous nommerons cette conſtante $+C$, C étant poſitif ou négatif.

SECTION PREMIERE.

De l'Intégration des Différentielles du premier ordre qui contiennent deux ou plusieurs variables.

CHAPITRE PREMIER.

Des quantités & des équations différentielles qui s'intégrent sans qu'il soit nécessaire d'en séparer auparavant les indéterminées, & sans aucune autre préparation.

§. I. *Sur l'intégration des quantités différentielles.*

I.

LA différentielle de xy est, comme on le sait, $ydx + xdy$. Donc l'intégrale de $ydx + xdy$ est $xy \pm C$. Par la même raison $yxdz + yzdx + xzdy$ a pour intégrale $xyz \pm C$. En général $y^m x^n$ ayant pour différentielle $mx^n y^{m-1} dy + ny^m x^{n-1} dx$, l'intégrale de cette derniere quantité est $y^m x^n \pm C$.

1°. Lorsqu'elles sont des quantités entieres.

II.

On sait encore que la différence d'une fraction, est la différence du numérateur multipliée par le dénominateur,

2°. Lorsqu'elles sont fractionnaires.

moins la différence du dénominateur multipliée par le numérateur, le tout divisé par le quarré du dénominateur. Ainsi la différence de $\frac{z}{u}$ est $\frac{udz-zdu}{uu}$. Donc l'intégrale de $\frac{udz-zdu}{uu}$ est $\frac{z}{u} \pm C$. De même l'intégrale de $\frac{ny^m x^{n-1} dx - mx^n y^{m-1} dy}{y^{2m}}$ est $\frac{x^n}{y^m} \pm C$.

III.

En général si on nomme ξ une fonction quelconque de x, & Y une fonction quelconque de y, l'intégrale de $\xi dY + Y d\xi$ est $Y\xi \pm C$; & $\frac{\xi dY - Y d\xi}{\xi^2}$ a pour intégrale $\frac{Y}{\xi} \pm C$.

IV.

3°. Lorsqu'elles contiennent des binomes, trinomes, &c. élevés à différentes puissances.

Nous avons vu dans la premiere partie de ce Traité que toutes les fois que dans une formule composée d'une seule variable & de constantes, la quantité hors du signe étoit la différentielle de la quantité sous le signe; l'intégrale de cette formule est la quantité même sous le signe dont l'exposant est augmenté de l'unité, divisée par ce même exposant ainsi augmenté de l'unité. Il en est de même pour les formules différentielles composées de plusieurs variables & de constantes, pourvu qu'elles aient la condition que nous venons d'énoncer.

Ainsi l'intégrale de $(dx + dy) \cdot \sqrt{x+y}$ est $\frac{2}{3} (x+y)^{\frac{3}{2}} \pm C$: celle de $(2adx + 2bdy) \cdot (ax+by)^{-\frac{1}{2}}$ est $4 \cdot (ax+by)^{\frac{1}{2}} \pm C$. Enfin celle de

$\frac{x^3dy+3yx^2dx+3xy^2dy+y^3dx}{2.(x^3y+y^3x)^{\frac{1}{2}}}$ eſt $(x^3y+y^3x)^{\frac{1}{2}} \pm C$.

V.

Si l'on avoit en général à intégrer $(xdy+ydx+2ydy).(xy+yy)^{\frac{n}{m}}$, l'intégrale en ſeroit $\frac{m}{m+n}.(xy+yy)^{\frac{m+n}{m}} \pm C$; & de même celle de $\frac{xdy+ydx+2ydy}{(xy+yy)^{\frac{n}{m}}}$ eſt $\frac{m}{m-n}.(xy+yy)^{\frac{m-n}{m}} \pm C$. Il en eſt ainſi de beaucoup d'autres.

VI.

Si cependant on étoit embarraſſé dans ces cas, & que l'intégrale ne ſe préſentât pas d'abord, on la trouveroit ſur le champ en ſe ſervant des transformations enſeignées dans la premiere Partie. Ainſi en faiſant dans $(xdy+ydx+2ydy).(xy+yy)^{\frac{n}{m}}$, $xy+yy=z$; on aura pour transformée $z^{\frac{n}{m}}dz$, dont l'intégrale eſt par la regle fondamentale de tout ce calcul $\frac{m}{n+m}z^{\frac{m+n}{m}} \pm C$; & en remettant pour z ſa valeur, on aura l'intégrale cherchée. Il en eſt de même pour toutes les différentielles qui ſont dans le même cas.

VII.

4°. Lorſque ces quantités renferment des Logarithmes.

On a établi que toutes les fois que le numérateur d'une fraction compoſée d'une ſeule indéterminée & de conſtantes, eſt la différentielle du dénominateur, l'intégrale de la propoſée eſt le logarithme du dénominateur. Cette regle a encore lieu, lorſque la fraction contient deux ou

pluſieurs indéterminées avec les mêmes conditions.

Suivant cette regle l'intégrale de $\frac{dx+dy}{x+y}$ eſt $l(x+y) \pm C$: celle de $\frac{xdy+ydx}{xy}$ eſt $lxy \pm C$: De même $\int \frac{xydx-xydy}{xxy-xyy} = l(xy-yy)^{\frac{1}{2}} \pm C$. En général $\int \frac{my^n x^{m-1}dx+nx^m y^{n-1}dy-(m+n)y^{m+n-1}dy}{rx^m y^n - ry^{m+n}} = l(x^m y^n - y^{m+n})^{\frac{1}{r}} \pm C$, en ſuppoſant que la ſous-tangente de la logarithmique eſt 1. C'eſt ce qu'on trouvera tout de ſuite en ſuppoſant $x^m y^n - y^{m+n} = z$: car alors on aura la transformée ſuivante $\frac{dz}{rz}$, dont on ſait que l'intégrale eſt $l(z)^{\frac{1}{r}}$. Donc, &c.

§. II. *Sur l'intégration des équations différentielles.*

VIII.

Ce que c'eſt qu'une équation différentielle d'un ordre quelconque.

Lorſqu'une quantité différentielle quelconque eſt ſuppoſée égale à zéro, on l'appelle équation différentielle. Toute équation différentielle eſt du même ordre que les quantités différentielles de l'ordre le plus élevé, qu'elle renferme; c'eſt-à-dire que l'équation $z^m dz + 2zdu + udz = 0$, dans laquelle les quantités différentielles dz & du ſont du premier ordre, eſt du premier ordre. La ſuivante $\frac{a^2y^2dx^2 + 2a^2yxdydx + a^2x^2dy^2}{y^4x^4} = 0$ eſt encore du premier. Celle-ci $ddu + xdxdu + vdu^2 = 0$ eſt du ſecond ordre; & ainſi de ſuite.

IX.

L'intégration des équations différentielles du premier

ordre s'appelle autrement méthode inverſe des tangentes. En voici la raiſon. La méthode directe des tangentes n'eſt autre choſe que la méthode de trouver la tangente d'une courbe dont l'équation eſt donnée ; c'eſt-à-dire (Sect. II. des Infiniment-Petits) de trouver la valeur de la ſous-tangente $\frac{y\,dx}{dy}$, ou ce qui eſt la même choſe de $\frac{dx}{dy}$, en ſuppoſant qu'on ait une équation en x & en y.

Ce que c'eſt que la méthode inverſe des tangentes.

Or une équation différentielle du premier ordre étant donnée, on a la valeur de $\frac{dx}{dy}$ ou de $\frac{y\,dx}{dy}$ en x & en y, c'eſt-à-dire, l'expreſſion de la ſous-tangente. L'intégration de cette équation donnera évidemment l'équation de la courbe. Donc cette intégration fera connoître la courbe dont la ſous-tangente eſt ſuppoſée donnée ; & ainſi elle eſt l'inverſe de la méthode directe des tangentes, qui conſiſte à trouver la ſous-tangente d'une courbe dont l'équation eſt donnée.

X.

Les regles pour intégrer les équations différentielles ſont à peu près les mêmes que les précédentes. Il y faut cependant ajouter un nouveau principe.

Lemme. Quand une différentielle eſt égale à zéro, ſon intégrale, s'il eſt poſſible de la trouver, doit être ſuppoſée égale à une conſtante qu'on prendra arbitrairement, en ſuivant toutesfois la loi des homogenes. Par exemple, ſi on a $\frac{2zu\,du - uu\,dz}{zz} = 0$ dont l'intégrale eſt $\frac{uu}{z}$, on la ſuppoſe égale à une grandeur conſtante a, ce qui donne $\frac{uu}{z} = a$, ou $uu = az$, pour l'intégrale complete.

Lemme préparatoire.

Voyons maintenant des équations qui s'intégrent sans aucune préparation.

XI.

Premier Exemple.

Ce que nous avons dit plus haut nous fait découvrir sur le champ que l'équation $xdy+ydx=uzdt+utdz+ztdu$ est la différentielle exacte de celle-ci $xy-uzt+C=0$; car il suffit pour s'en appercevoir de regarder les deux membres de cette équation comme deux différentielles particulieres, & d'en prendre séparément l'intégrale.

XII.

On suivra la même regle pour l'intégration de beaucoup d'autres équations dans lesquelles les différentielles sont élevées au quarré, au cube, &c.

Si l'on a, par exemple, l'équation suivante, $x^2dy^2+2xydxdy+y^2dx^2=a^4dx^2$; pour l'intégrer j'en prends la racine quarrée. Cette opération me donne $xdy+ydx=a^2dx$, donc l'intégrale est $xy-aax+C=0$.

XIII.

Qu'on propose l'équation $a^3ydx=fy^3dy+h^2y^2dz+a^3xdy$, qui est la même que celle-ci, $a^3ydx-a^3xdy=fy^3dy+h^2y^2dz$; ou bien encore, la même que cette autre $\frac{a^3ydx-a^3xdy}{yy}=fydy+h^2dz$; je vois sans peine que l'intégrale de cette équation est $\frac{a^3x}{y}-\frac{fyy}{2}-h^2z+C=0$.

XIV.

XIV.

Scholie. De ce que dans l'exemple précédent l'équation n'eſt devenue intégrable qu'après que l'un & l'autre membre en a été diviſé par yy, il eſt aſſez ſimple de penſer qu'il pourroit y avoir beaucoup de différentielles qui n'étant pas intégrables dans la forme ſous laquelle on nous les préſente, le deviendroient, ſi on les multiplioit ou ſi on les diviſoit par quelques fonctions de leurs variables.

D'autres auſſi deviendront intégrables en ſe ſervant des ſubſtitutions enſeignées dans le Chapitre ſecond de la premiere Partie, pour les transformer; d'autres enfin demanderont des opérations plus compoſées. Mais comme ſouvent les différentielles à pluſieurs variables ſont très-compliquées; qu'il eſt par conſéquent difficile de reconnoître les méthodes qui leur conviendroient; & que même quelquefois on eſſayeroit inutilement de les leur appliquer; avant que d'entrer dans le détail des méthodes particulieres, nous en allons expoſer une générale qui apprend à reconnoître ſi une quantité ou une équation quelconque compoſée d'un nombre quelconque de variables & de leurs différentielles (dans l'état où elle eſt propoſée) eſt intégrable algébriquement, ou conſtructible par les quadratures. Lorſque l'intégration eſt poſſible, cette méthode nous apprend à trouver l'intégrale. Souvent même, lorſque la quantité ou l'équation dans l'état dans lequel on

la propoſe n'eſt pas intégrable, la même méthode nous fait trouver le facteur qui en l'affectant la rend ſuſceptible d'intégration. Cette méthode eſt fondée ſur un Théorême dont nous ferons le plus grand uſage dans toute la ſuite de ce Traité.

CHAPITRE II.

Méthode pour reconnoître quand une différentielle compoſée de pluſieurs variables eſt la différentielle exacte de quelque quantité, & pour l'intégrer dans ce cas.

Solution d'un Problême néceſſaire pour ce qui ſuit.

AVant que d'expoſer cette méthode, il eſt néceſſaire de donner ici la ſolution d'un Problême dont on ne peut ſe paſſer. Ce Problême conſiſte à différentier les quantités de la forme de $\int A dx$; A eſt une fonction de x & de y, telle que c'eſt x qui a varié; au lieu qu'on demande ici la différentielle de $\int A dx$, y variant & x étant conſtant.

XV.

PROBLEME. Différentier les quantités de la nature de $\int A dx$, en ſuppoſant y variable & x conſtant.

Nous allons d'abord donner la ſolution de ce Problême ſur un exemple.

SOLUTION. Suppoſons que la quantité propoſée à différentier ſoit $\int dx \sqrt{(aa+xx)}$, en faiſant a variable. Je différentie la quantité $\sqrt{(aa+xx)}$ en faiſant ſeule-

ment varier a. Cette opération donne $\frac{ada}{\sqrt{(aa+xx)}}$. J'en ôte da que je mets devant le ſigne $\int$ en laiſſant dx ainſi qu'il étoit ſous ce même ſigne : j'aurai $da\int\frac{adx}{\sqrt{(aa+xx)}}$ pour la différentielle cherchée de $\int dx\sqrt{(aa+xx)}$; a variant & dx étant conſtant. C'eſt ce qui ſe démontre ainſi.

Soit la courbe BM dont l'équation eſt $y=\sqrt{(aa+xx)}$, telle que . . . . . $BA = a$ Figure 1e

$AP = x$

$Pp = dx$

$PM = y = \sqrt{(aa+xx)}$,

Menant l'ordonnée infiniment proche pm, on a le petit eſpace $PMmp = dx\sqrt{(aa+xx)}$. Donc la ſomme de ces petits eſpaces, ou l'aire entiere $BAPM$ ſera $\int dx\sqrt{(aa+xx)}$. Soit à préſent prolongé BA en b, PM en M', pm en m' ; & par les points b, M', m', menée la courbe $bM'm'$. En faiſant varier le parametre a & laiſſant x conſtant, on aura $MM' = \frac{ada}{\sqrt{(aa+xx)}}$; donc le petit eſpace $M'm'Mm = \frac{adadx}{\sqrt{(aa+xx)}}$; donc la ſomme des petits eſpaces $M'm'Mm$, ou $BbM'M = \int\frac{adadx}{\sqrt{(aa+xx)}}$: or da demeure toujours le même dans toutes les quantités $\frac{adadx}{\sqrt{(aa+xx)}}$, puiſque $da = Bb$; donc on peut le faire ſortir hors du ſigne d'intégration : donc on a $BbM'M = da\int\frac{adx}{\sqrt{(aa+xx)}}$. Or $BbM'M$ eſt l'élément de l'aire $ABMP$; donc la différence de $\int dx\sqrt{(aa+xx)}$ eſt $da\int\frac{adx}{\sqrt{(aa+xx)}}$. Il eſt évident qu'on fera le même raiſonnement ſur tout autre exemple.

XVI.

Solution générale du Problême.

COROLLAIRE. Donc en général la différence de $\int A\,dx$, y étant supposée variable, sera $dy\int \frac{dA}{dy}\,dx$; dans cette quantité, $\frac{dA}{dy}$ exprime le coefficient qu'auroit dy dans la différentiation de la quantité A. Ce qu'on voit aisément par l'exemple ci-dessus.

Après la solution de ce Problême, passons à l'exposition de la méthode. Nous l'appliquerons d'abord aux quantités & aux équations différentielles qui ne renferment que deux variables; ensuite nous l'appliquerons à celles qui en renferment trois ou un plus grand nombre.

§. I. *Exposition de la méthode appliquée aux quantités & aux équations différentielles qui ne renferment que deux variables.*

XVII.

Théorême fondamental.

THÉOREME. Si on différentie une quantité telle que A composée de deux variables t & u, en faisant u variable & t constant, & qu'ensuite on différentie la différentielle qui en résulte en faisant t variable & u constant, on aura la même quantité que si on différentioit d'abord A en faisant u constant & t variable, & qu'ensuite on différentiât la différentielle qui en résulte en faisant t constant & u variable. Par exemple, soit $A = \sqrt{(t^2 + nu^2)}$. Différentions cette quantité en supposant t constant, la différentielle sera $\frac{nu\,du}{\sqrt{(t^2+nu^2)}}$, qui différentiée de nouveau en traitant u comme constant, donne $\frac{-ntu\,dt\,du}{(t^2+nu^2)^{\frac{3}{2}}}$;

Maintenant différentions A en regardant u comme conſtant, nous aurons $\frac{tdt}{\sqrt{(t^2+nu^2)}}$; dont la différentielle en ſuppoſant t conſtant ſera $\frac{-ntudtdu}{(t^2+nu^2)^{\frac{3}{2}}}$, qui eſt la même quantité que la précédente.

La démonſtration de ce Théorême ſe tire des principes mêmes du Calcul différentiel.

Démonstration. Mettons dans A, $t+dt$ au lieu de t, A ſe change en $B=\sqrt{(t+dt)^2+nu^2}$; mettons enſuite dans A au lieu de u, $u+du$, A ſe change en $C=\sqrt{t^2+n(u+du)^2}$. Enfin ſi l'on met en même temps dans A au lieu de t, $t+dt$, & au lieu de u, $u+du$, A ſe change en $D=\sqrt{(t+dt)^2+n(u+du)^2}$. Il eſt évident par l'inſpection ſeule que ſi dans B on écrit pour u, $u+du$, B devient D; & de même, que ſi dans C on écrit $t+dt$ pour t, C devient D. Cela poſé, ſi on différentie A en regardant t comme conſtant, on aura $C-A$. La raiſon en eſt ſimple. Car pour différentier une quantité, x, par exemple, il faut ſuppoſer que x devient $x+dx$, & alors la différence qu'il y aura entre x dans le premier état & x dans le ſecond ſera la différentielle de x; il faudra donc retrancher x de $x+dx$, ce qui donne dx. De même ſuppoſant t conſtant, pour avoir la différentielle de A, il faut ſubſtituer dans A à la place de u, $u+du$, ce qui donne C. C eſt donc ce que devient A au ſecond inſtant; la différence entre A au premier inſtant & A au ſecond inſtant, ou la différentielle de A ſera donc $C-A$. Le calcul eſt conforme à ce raiſonnement.

Car $C-A=\sqrt{t^2+n(u+du)^2}-\sqrt{(t^2+nu^2}$

$=\frac{\left(\sqrt{t^2+n(u+du)^2}-\sqrt{t^2+nu^2}\right)\cdot\left(\sqrt{t^2+n(u+du)^2}+\sqrt{t^2+nu^2}\right)}{\sqrt{t^2+n(u+du)^2}+\sqrt{(t^2+nu^2)}}$

$=\frac{2nudu+ndu^2}{\sqrt{(t^2+nu^2+2nudu+ndu^2)}+\sqrt{(t^2+nu^2)}}=\frac{ndu}{\sqrt{(t^2+nu^2)}}$

qui eſt en effet la différentielle de A en ſuppoſant t conſtant. Si dans $C-A$ on met $t+dt$ au lieu de t, on aura $D-B$, & la différentielle ſera par les raiſons que nous venons d'expoſer $D-B-C+A$.

Maintenant dans A mettons $t+dt$ au lieu de t, nous aurons B, & la différentielle de A en ſuppoſant u conſtant ſera $B-A$. Si dans cette différentielle on écrit $u+du$ au lieu de u, elle devient $D-C$; & la différentielle ſera par conſéquent $D-C-B+A$, différentielle que nous avons trouvée abſolument la même par la premiere opération.

XVIII.

Autre maniere de préſenter le Théorême précédent.

Ce Théorême peut encore ſe préſenter ſous une autre forme qui ſuppoſe toujours les mêmes principes.

THÉOREME. Si $Adx+Bdy$ repréſente la différentielle d'une fonction de x, de y & de conſtantes, la différence de A priſe en ſuppoſant ſeulement y variable & diviſant par dy, eſt égale à la différence de B priſe en ſuppoſant x ſeul variable & diviſant par dx. Ce Théorême s'énonce ainſi algébriquement $\frac{dA}{dy}=\frac{dB}{dx}$, ſi $\int Adx+Y=\int Bdy+X$ (Y étant une fonction de y & de conſtantes qu'on peut ajouter à $\int Adx$, & X une fonction de x & de conſtantes qu'on peut ajouter à

$\int B\,dy$). On se souviendra que $\frac{dA}{dy}$ exprime le coefficient qu'aura dy dans la différentiation de A, & $\frac{dB}{dx}$ celui de dx dans la différentiation de B.

Démonstration. Les deux membres de cette derniere équation sont égaux : donc la différence de l'un est égale à la différence de l'autre, quelle que soit la quantité que l'on fasse varier. Donc $B\,dy$ qui est la différentielle de $\int B\,dy + X$ en faisant x constant & y variable, sera la même chose que la différentielle de $\int A\,dx + Y$ en supposant aussi y variable & x constant. Donc $B\,dy =$ (Problême précédent) $dy \int \frac{dA}{dy}\,dx + dY$; ou $B = \int \frac{dA}{dy}\,dx + \frac{dY}{dy}$. Je prends maintenant la différentielle de cette quantité en faisant varier x ; j'ai $\frac{dB}{dx}\,dx = \frac{dA}{dy}\,dx$, ou $\frac{dB}{dx} = \frac{dA}{dy}$.

XIX.

Corollaire. On démontrera de la même maniere que si $\frac{dB}{dx} = \frac{dA}{dy}$, $A\,dx + B\,dy$ est nécessairement une différentielle complete, c'est-à-dire qu'il y aura quelque fonction de x, algébrique, ou dépendante des quadratures, qui en sera l'intégrale exacte.

XX.

Son application à quelques différentielles.

Premier exemple.

Soit la quantité $x\,dy\,\sqrt{(xx+yy)} + y\,dx\,\sqrt{(xx+yy)}$; je vois qu'elle n'a pas d'intégrale : car la différence de $x\sqrt{(xx+yy)}$ en supposant x variable, y constant, & ôtant dx, est $\sqrt{(xx+yy)} + \frac{xx}{\sqrt{(xx+yy)}}$: celle de

$y\sqrt{(xx+yy)}$ en faisant varier y, supposant x constant & divisant par dy, est $\sqrt{(xx+yy)} + \frac{yy}{\sqrt{(xx+yy)}}$. Or ces deux différentielles sont des quantités différentes. Donc la différentielle proposée n'a point d'intégrale.

XXI.

Second exemple.

Soit maintenant la quantité différentielle $\frac{y\,dx - x\,dy}{xx+yy}$, dont on cherche l'intégrale. Pour m'assurer si cette quantité en a une, soit algébrique, soit dépendante des quadratures, je prends la différence de $\frac{y}{xx+yy}$ en variant seulement y & divisant par dy. Il me vient $\frac{xx-yy}{(xx+yy)^2}$. Je trouve la même quantité pour la différentielle de $\frac{-x}{xx+yy}$ en faisant varier seulement x & ôtant dx. Donc la proposée est intégrable.

XXII.

Il en est de même de toutes les autres différentielles à deux variables, quelque compliquées qu'elles soient. On voit tout d'un coup par le secours de la méthode précédente si elles sont intégrables ou non : ce qui épargne des opérations souvent longues & pénibles, quelquefois même infructueuses, quand la proposée n'est pas une différentielle exacte.

XXIII.

Application du Théorême aux équations différentielles à deux variables.

Appliquons maintenant le Théorême aux équations différentielles à deux variables. Cette application est facile & se fait avec le même succès. Ainsi pour savoir si l'équation

$A\,dx +$

$Adx + Bdy = o$ eſt une différentielle exacte, il faut examiner ſi $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$. En ce cas l'équation ſeroit intégrable algébriquement, ou conſtructible par les quadratures; autrement elle ne le ſeroit pas. Nous allons dire maintenant comment ces ſortes de quantités, ou d'équations, s'intégrent.

Maniere d'intégrer les quantités A dx + B dy, *& les équations* A dx + B dy = o, *lorſqu'elles ſont des différentielles exactes.*

XXIV.

Lorſqu'une fois on aura reconnu par le Théorême précédent qu'une différentielle telle que $Adx + Bdy$ eſt intégrable, voici la méthode qu'on peut ſuivre pour parvenir à l'intégration. *Appliquée 1°. aux différentielles $Adx + Bdy$.*

J'integre ſeulement l'un des deux membres, Adx par exemple, en y ſuppoſant y conſtant & x variable : l'intégrale étant trouvée, je la différentie en faiſant y variable & x conſtant; je retranche cette différentielle de Bdy: ſi la différence eſt zéro, c'eſt une marque que $\int Adx$ ſuffit pour l'intégrale de $Adx + Bdy$: ſinon la différence ne peut être qu'une quantité compoſée de y, de dy & de conſtantes, dont l'intégrale étant ajoutée à $\int Adx$, la rendra l'intégrale complete de $Adx + Bdy$.

XXV.

Soit la différentielle $dx\sqrt{y} + \frac{a\,dy}{2\sqrt{y}} - a\,dy\sqrt[3]{x} -$ *Exemple particulier.*

$\frac{aydx}{3x^{\frac{2}{3}}}$ que nous reconnoîtrons aiſément par le Théorême fondamental être une différentielle exacte ; pour l'intégrer ſuivant la méthode précédente, je prends l'intégrale de $dx\sqrt{y} - \frac{aydx}{3x^{\frac{2}{3}}}$ en ſuppoſant y conſtant : cette intégrale eſt $x\sqrt{y} - ayx^{\frac{1}{3}} \pm C$. Je différentie cette quantité en faiſant x conſtant & y variable ; j'ai pour différentielle $\frac{xdy}{2\sqrt{y}} - ax^{\frac{1}{3}}dy$; laquelle retranchée de $\frac{xdy}{2\sqrt{y}} - ax^{\frac{1}{3}}dy$ donne zéro. Donc l'intégrale complete de la propoſée eſt $x\sqrt{y} - ayx^{\frac{1}{3}} \pm C$. C'eſt ce dont on peut ſe convaincre, ſi on différentie cette quantité en faiſant x & y variables.

XXVI.

4°. Application de cette Méthode aux équations $Adx + Bdy = o$.

La même méthode s'applique aux équations différentielles que le Théorême fondamental nous aura montré être intégrables. Il faudra ſeulement obſerver de faire l'intégrale trouvée égale à une conſtante.

XXVII.

SCHOLIE. Il arrive ſouvent, comme on l'a déja vu, que l'équation n'étant pas une différentielle complete, on peut la rendre telle en la multipliant par quelque facteur compoſé de x, de y & de conſtantes. Dans la ſuite de cet Ouvrage nous nous ſervirons du Théorême fondamental pour déterminer ce facteur dans certains cas. On trouve dans les Mémoires de l'Académie, année 1740, une méthode pour découvrir ſouvent quel peut être ce facteur

qui se seroit évanoui en différentiant, à cause de l'égalité à zéro. Cette méthode est des plus ingénieuses ; mais comme elle ne réussit pas toujours, que d'ailleurs le procédé en est assez pénible, nous ne la détaillerons pas ici. On peut la voir dans le Mémoire même que nous venons de citer, dans lequel elle est détaillée d'une maniere exacte & lumineuse. Je passe à l'application du Théorême aux équations différentielles qui renferment plus de deux variables.

§. II. *Application du Théorême fondamental aux équations différentielles qui renferment plus de deux variables.*

XXVIII.

Premiere Proposition. Soit $Adx + Bdy + Cdz = o$ une équation quelconque différentielle contenant trois variables, on s'assurera d'abord si cette équation dans l'état où elle est, ne seroit pas la différentielle exacte de quelque équation à trois variables ; ce qui se découvrira en examinant par le moyen de notre Théorême si $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, si $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, & si $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$. Si ces trois équations ont lieu à la fois, la quantité $Adx + Bdy + Cdz$ est une différentielle complete, sinon elle n'en est pas une.

Moyen de s'assurer si les équations représentées par $Adx + Bdy + Cdz = o$ sont intégrables.

Démonstration. Il est évident que $Adx + Bdy + Cdz$ n'a point d'intégrale, si les équations $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx} \times \frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$ n'ont pas lieu en même temps. Car si $Adx + Bdy + Cdz$ est une différentielle complete, il faut que $Adx + Bdy$ en soit une en supposant

z constant, & faisant varier x & y, ce qui donne, suivant le Théorême fondamental, $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$. De même si $Adx + Bdy + Cdz$ est une différentielle complete, il faut que $Adx + Cdz$ en soit une en supposant y constant, x & z variables ; donc on aura $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$. On fera le même raisonnement sur $Bdy + Cdz$.

Pour prouver l'inverse de cette proposition, savoir que si les trois équations $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$ ont lieu, $Adx + Bdy + Cdz$ est une différentielle exacte, il faut faire voir que l'intégrale de $Adx + Bdy$ prise en faisant y & z constans, sera, à une fonction près de y & de z, l'intégrale de $Adx + Bdy + Cdz$, où x, y, z sont variables ; c'est ce qu'on trouve de la façon suivante.

Je différentie $\int A dx$ en faisant x, y, z variables ; j'aurai (Article XVI.) $Adx + dy \int \frac{dA}{dy} dx + dz \int \frac{dA}{dz} dx$. Il ne s'agit que de montrer que cette quantité ne differe de la proposée que par une fonction de y, z, dy, dz, qui soit une différentielle complete : c'est-à-dire qu'il faut s'assurer $Adx - Adx + Bdy - dy \int \frac{dA}{dy} dx + Cdz - dz \int \frac{dA}{dz} dx$, ou en réduisant que $(B - \int \frac{dA}{dy} dx)\, dy + (C - \int \frac{dA}{dz} dx)\, dz$ est une fonction sans x & une différentielle complete.

Or 1°. si $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\int \frac{dA}{dy} dx$, ou $\int \frac{dB}{dx} dx$ n'est que B plus une fonction de y & de z sans x. Donc $B - \int \frac{dA}{dy} dx$ est cette fonction sans x.

2°. Si $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, $\int \frac{dA}{dz} dx$, ou $\int \frac{dC}{dx} dx$ n'est que C,

plus une fonction de y & de z ſans x. Donc $C - \int \frac{dA}{dz}\,dx$ eſt cette fonction ſans x. Donc $(B - \int \frac{dA}{dy}\,dx)\,dy + (C - \int \frac{dA}{dz}\,dx)\,dz$ eſt une quantité ſans x.

Il nous reſte à prouver qu'elle eſt une différentielle complete, ou, ce qui revient au même, que $d\,\underline{(B - \int \frac{dA}{dy}\,dx)}_{dz} = d\,\underline{(C - \int \frac{dA}{dz}\,dx)}_{dy}$. Pour le prouver je remarque que $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$ par l'hypotheſe. Donc en effaçant dans les deux membres de l'équation ce qui ſe détruit, elle ſe réduit à $d\,\underline{(\int \frac{dA}{dy}\,dx)}_{dz} = d\,\underline{(\int \frac{dA}{dz}\,dx)}_{dy}$. Mais $dy \int \frac{dA}{dy}\,dx + dz \int \frac{dA}{dz}\,dx$ eſt la différentielle de $\int A\,dx$ en faiſant x conſtant, z & y variables; donc par le Théorême fondamental $d\,\underline{(\int \frac{dA}{dy}\,dx)}_{dz} = d\,\underline{(\int \frac{dA}{dz}\,dx)}_{dy}$. Donc $(B - \int \frac{dA}{dy}\,dx)\,dy + (C - \int \frac{dA}{dz}\,dx)\,dz$ eſt une différentielle complete: cette même quantité eſt une fonction ſans x. Donc, &c.

Appliquons la propoſition précédente à un exemple.

XXIX.

Soit propoſée l'équation différentielle $max^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} y^{m-1}\,dy + nay^m z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}}\,dx - \frac{ay^m z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}}\,dx}{2} - \frac{ay^m x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}}\,dz}{2} = 0$. Pour que cette différentielle ſoit intégrable, il faut que les trois équations ſuivantes aient lieu en même temps. Exemple.

1°. $d\left\{nay^m z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}} - \frac{ay^m z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}}}{2}\right\} = d\left(max^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} y^{m-1}\right)$

y seul étant variable dans le premier membre, & x dans le second.

2°. $d\left((n-\frac{1}{2})\,ay^m z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}}\right) = d\left(-ay^m x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}}\right)$

z seul étant variable dans le premier membre, & x dans le second.

3°. $d\left(max^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} y^{m-1}\right) = d\left(-ay^m x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}}\right)$

z seul étant variable dans le premier membre & y dans le second. Or les équations ont lieu, puiſqu'on a en même temps $mnay^{m-1} z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}} dy - amy^{m-1} z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}} dy = (n-\frac{1}{2})\,amy^{m-1} z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{3}{2}} dx$, $(\frac{1}{4}-\frac{n}{2})\,ay^m x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{3}{2}} dz = (-n+\frac{1}{2})\,ay^m x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} dx$, & enfin $-amy^{m-1} x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{3}{2}} dz = -amx^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} y^{m-1} dy$. Donc l'équation propoſée eſt intégrable. Nous trouverons par la méthode de l'article ſuivant, que ſon intégrale eſt $\frac{ax^n y^n}{\sqrt{xz}} + C = 0$.

XXX.

Intégration des équations différentielles completes à trois variables.

SECONDE PROPOSITION. Lorſque j'ai reconnu que $Adx + Bdy + Cdz = 0$ eſt intégrable, voici la méthode qu'il faut ſuivre pour parvenir à l'intégration. J'integre

d'abord Adx en regardant x comme variable, y & z comme conſtantes. Ce terme étant intégré, ſi la différentielle eſt provenue d'un ſeul terme compoſé de x, y, z & de conſtantes, on aura l'intégrale complete de la propoſée; ſinon il ne pourra manquer à l'intégrale qu'une fonction de y & de z. On trouvera cette fonction de la maniere ſuivante. Je rediffèrentie la quantité intégrée $\int Adx$ en regardant x comme conſtant, y & z comme variables; je retranche la différentielle qui en réſulte de $Bdy + Cdz$: le reſte ſera une fonction différentielle de y & z, dont l'intégrale ſera la fonction à ajouter à $\int Adx$.

S'il paroiſſoit plus commode d'intégrer d'abord un des deux autres termes $Bdy + Cdz$, on en feroit le maître, & l'opération demeureroit la même pour les deux termes reſtants.

XXXI.

En ſuivant cette méthode, on trouvera l'intégrale de l'équation différentielle $\frac{abz^2y^{-1}x^{-\frac{1}{2}}dx}{2} + 2abx^{\frac{1}{2}}y^{-1}zdz - abx^{\frac{1}{2}}z^2y^{-2}dy = 0$ que nous reconnoîtrons (Art. XXVIII.) être intégrable. Le premier terme intégré en traitant x ſeul comme variable eſt $abz^2y^{-1}x^{\frac{1}{2}} + C$; & l'on voit au premier coup d'œil, que c'eſt l'intégrale complete de la propoſée. Application à un exemple particulier.

XXXII.

Qu'on nous demande ſi l'équation différentielle ſuivante $abx^{-1}dz + \frac{bxydy - by^2dx}{x^2\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{abzdx}{xx} = 0$ eſt intégrable Second Exemple.

& quelle en eſt l'intégrale, il ſera facile d'appliquer la méthode précédente à cette différentielle.

J'examine d'abord ſi l'on a les trois équations ſuivantes ;

1°. $d\left\{\frac{abx^{-1}}{dx}\right\} = \underset{dz}{d\left\{\frac{-by^2}{x^2\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{abz}{xx}\right\}}$, x ſeul variant dans le premier nombre, & z ſeul dans le ſecond ;

2°. $d\left\{\frac{abx^{-1}}{dy}\right\} = \underset{dz}{d\left\{\frac{bxy}{x^2\sqrt{(xx+yy)}}\right\}}$, y ſeul variant dans le premier membre & z ſeul dans le ſecond ;

3°. $\underset{dx}{d\left\{\frac{by}{x\sqrt{(xx+yy)}}\right\}} = \underset{dy}{d\left\{\frac{-by^2-abz\sqrt{(xx+yy)}}{x^2\sqrt{(xx+yy)}}\right\}}$, x ſeul variant dans le premier membre, & y ſeul dans le ſecond. Or en différentiant ſuivant les conditions preſcrites, je trouve que les trois équations précédentes ont lieu ; donc l'équation propoſée eſt intégrable.

Cherchons maintenant quelle eſt ſon intégrale. Suivant ce qui eſt dit (Art. xxx.) je prends d'abord celle de $abx^{-1}dz$ en ſuppoſant x conſtant ; j'ai $\frac{abz}{x} + C$. Je différentie cette quantité en traitant z comme conſtant & x comme variable ; j'ai $-\frac{abzdx}{xx}$ que je retranche des trois autres termes de la propoſée. Il me reſte après cette opération $\frac{bxydy - by^2dx}{x^2\sqrt{(xx+yy)}}$ dont l'intégrale ajoutée à la quantité $\frac{abz}{x}$ ſera l'intégrale complete de la propoſée. Pour intégrer (N) $\frac{bxydy-by^2dx}{x^2\sqrt{(xx+yy)}}$, je me ſers de la méthode expoſée (Art. xxiv.) j'intégre le premier terme $\frac{bydy}{x\sqrt{(xx+yy)}}$ en ſuppoſant x conſtant : l'intégrale eſt $\frac{b\sqrt{(xx+yy)}}{x} + A$. Je la différentie en ſuppoſant x ſeule variable ; la différentielle

telle est $\frac{-by^2dx}{x^2\sqrt{(xx+yy)}}$: laquelle retranchée du second terme de la proposée (N) donne zéro. Donc $\int\frac{bxydy-by^2dx}{x^2\sqrt{(xx+yy)}} = \frac{b\sqrt{(xx+yy)}}{x} + A$. Donc enfin l'intégrale de l'équation $\frac{abdz}{x} + \frac{bxydy-by^2dx}{x^2\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{abzdx}{xx} = 0$ est $\frac{abz+b\sqrt{(xx+yy)}}{x} + B = 0$.

XXXIII.

Quand une équation différentielle à trois variables n'est pas complete, on peut quelquefois la rendre telle en la multipliant par un facteur commun à tous ses termes.

Suppoſons préſentement qu'on ait découvert par la méthode de l'Article XXVIII. que l'équation $Adx + Bdy + Cdz = 0$, dans l'état où elle eſt, n'eſt point une différentielle exacte, on cherchera quel eſt le facteur, qui multipliant tous les termes de cette équation la rendroit une différentielle complete.

Je nomme μ ce facteur commun à tous les termes de l'équation, & dont l'addition la rend une différentielle complete; alors $\mu Adx + \mu Bdy + \mu Cdz$ ſera une différentielle complete. Par conſéquent j'aurai les trois équations ſuivantes :

$$\frac{Ad\mu}{dy} + \frac{\mu dA}{dy} = \frac{Bd\mu}{dx} + \frac{\mu dB}{dx};$$
$$\frac{Ad\mu}{dz} + \frac{\mu dA}{dz} = \frac{Cd\mu}{dx} + \frac{\mu dC}{dx};$$
$$\frac{Bd\mu}{dz} + \frac{\mu dB}{dz} = \frac{Cd\mu}{dy} + \frac{\mu dC}{dy}.$$

Il ne s'agit maintenant que de donner à μ une forme aſſez générale avec des coefficiens indéterminés, pour que cette quantité étant ſubſtituée dans les trois équations précédentes, en faſſe évanouir tous les termes.

Il y a une infinité d'équations différentielles à

Mais avant que de chercher cette forme générale pour μ, il eſt néceſſaire d'avertir que ſouvent on la chercheroit

trois variables qui n'ont point d'intégrales. inutilement, parce qu'il y a une infinité d'équations différentielles à trois variables qui n'ont point d'intégrales.

XXXIV.

Premiere démonstration. Pour le prouver je reprends les trois équations précédentes,

$$\frac{Ad\mu}{dy} + \frac{\mu dA}{dy} = \frac{Bd\mu}{dx} + \frac{\mu dB}{dx};$$

$$\frac{Ad\mu}{dz} + \frac{\mu dA}{dz} = \frac{Cd\mu}{dx} + \frac{\mu dC}{dx};$$

$$\frac{Bd\mu}{dz} + \frac{\mu dB}{dz} = \frac{Cd\mu}{dy} + \frac{\mu dC}{dy}.$$

J'en fais évanouir les grandeurs $\frac{d\mu}{dx}$, $\frac{d\mu}{dy}$, $\frac{d\mu}{dz}$, qui ſont des quantités finies; puiſque $\frac{d\mu}{dx}$ &c. exprime le rapport de $d\mu$ à dx, à dy, à dz; rapport qui eſt toujours fini. Je les fais donc évanouir de la même maniere dont on fait évanouir trois inconnues ordinaires; il arrivera que μ s'évanouira en même temps, ce qu'il eſt aiſé de voir par le calcul ſuivant. Des trois équations précédentes on tire $\frac{d\mu}{dy} = \underbrace{\frac{Bd\mu}{dx} + \frac{\mu dB}{dx} - \frac{\mu dA}{dy}}_{A}$ & auſſi $\frac{d\mu}{dy} = \underbrace{\frac{Bd\mu}{dz} + \frac{\mu dB}{dz} - \frac{\mu dC}{dy}}_{C}$;

Donc $\frac{ABd\mu}{dz} + \frac{A\mu dB}{dz} - \frac{A\mu dC}{dy} = \frac{CBd\mu}{dx} + \frac{C\mu dB}{dx} - \frac{C\mu dA}{dy}$.

D'ailleurs on a $\frac{d\mu}{dx} = \underbrace{\frac{Ad\mu}{dz} + \frac{\mu dA}{dz} - \frac{\mu dC}{dx}}_{C}$. Subſtituant cette valeur de $\frac{d\mu}{dx}$ dans l'équation précédente, elle devient $\frac{ABd\mu}{dz} + \frac{A\mu dB}{dz} - \frac{A\mu dC}{dy} = \frac{ABd\mu}{dz} + \frac{B\mu dA}{dz} - \frac{B\mu dC}{dx} + \frac{C\mu dB}{dx} - \frac{C\mu dA}{dy}$. Je réduis cette équation, je la diviſe par μ qui ſe trouve en multiplier tous les termes, après qu'on aura effacé ceux qui ſe détruiſent; j'aurai $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx}$

$+\frac{AdB}{dz} - \frac{BdA}{dz} - \frac{AdC}{dy} + \frac{CdA}{dy} = 0$, équation qui nous apprend que C, A, B, doivent avoir entre eux la relation exprimée par cette équation pour que la proposée $Adx + Bdy + Cdz = 0$ soit intégrable.

XXXV.

Leur différence en cela, des équations à deux variables.

Il n'en eſt donc pas des équations différentielles à trois variables comme de celles qui n'en ont que deux : car on eſt fondé à croire (où du moins on n'a pas démontré le contraire juſqu'à préſent) que toute équation différentielle à deux variables ſe tire de la différentiation de quelque équation en termes finis, au lieu que la démonſtration précédente apprend qu'il y a une infinité d'équations à trois variables qui ne peuvent pas être venues par la différentiation d'aucune équation en termes finis.

XXXVI.

Qui expriment toujours une courbe dont la conſtruction eſt poſſible.

Il y a plus : ſans examiner ſi les équations différentielles à deux variables viennent de la différentiation de quelque équation en termes finis, il eſt aiſé de prouver qu'elles expriment toujours une courbe dont la conſtruction eſt poſſible.

Car ſoit toute équation différentielle à deux variables repréſentée par $sdx = rdy$ (s & r étant des fonctions de x, de y & de conſtantes) ; prenons deux lignes à volonté AB (x) & BC (y) ; nous aurons par conſéquent $Bb = dx$, $cc' = dy = \frac{sdx}{r}$. Prenons enſuite

une ligne bb' à volonté pour un ſecond dx, on aura $c'c'' = dy = \frac{s\,dx}{r}$, s & r étant des fonctions de Ab & bc'; & ainſi de ſuite; tous les points c, c' appartiendront à la courbe de l'équation donnée. Il eſt vrai qu'on ne peut exécuter cette opération; mais il ſuffit de l'imaginer exécutée, pour démontrer que toute équation différentielle à deux variables exprime toujours quelque courbe conſtructible.

XXXVII.

Il n'en eſt pas ainſi des équations différentielles à trois variables. Toutes celles dans leſquelles l'équation $\frac{B\,dC}{dx} - \frac{C\,dB}{dx} + \frac{A\,dB}{dz} - \frac{B\,dA}{dz} - \frac{A\,dC}{dy} + \frac{C\,dA}{dy} = 0$ n'a pas lieu, ne peuvent être conſtruites en aucune maniere, & les Problêmes dont la ſolution dépendroit d'équations pareilles, ſeroient impoſſibles.

Cette propoſition peut encore ſe démontrer d'une autre maniere indépendante de toute intégration.

Seconde démonſtration. Que pluſieurs équations différentielles à trois variables ne peuvent avoir aucune conſtruction.

Soit $dz = \omega\,dx + \vartheta\,dy$ une équation quelconque à trois variables, ω & ϑ étant des fonctions quelconques de x, y, z, avec des conſtantes; qu'on ſe propoſe de trouver la ſurface courbe exprimée par cette équation.

Figure 3. Cette démonſtration ſe fait par le moyen des ſurfaces courbes.

Soit AP l'axe des x, AQ celui des y, AR celui des z. Soient de plus PN la tranche de la ſurface courbe par un plan perpendiculaire à l'axe des x, & QN la tranche de la ſurface courbe par un plan perpendiculaire à l'axe des y; l'équation de la tranche PN ſera $dz = \vartheta\,dy$, & celle de la tranche QN ſera $dz = \omega\,dx$.

Imaginons maintenant que qr & pn ſoient deux autres tranches de la ſurface courbe par des plans infiniment près & paralleles aux premiers ; on verra pour lors que ſi l'équation $dz = \omega\,dx + \vartheta\,dy$ exprime une ſurface courbe poſſible, il faudra que les deux courbes qr, pn, ſe rencontrent en un point l de la droite kl, ſection des deux plans $q\mu r$, pmn ; c'eſt-à-dire qu'il faudra que l'équation de la courbe qrl ſoit telle, qu'en y faiſant $x = qk$, on ait pour z la même valeur qu'en faiſant dans l'équation de la courbe pnl, $y = pk$.

Pour examiner ſi cela eſt, il faut chercher 1°. la valeur de lk priſe pour une ordonnée de la courbe pnl ; & pour cela conſidérer lk comme ce qu'eſt devenue $r\mu$, lorſque AP eſt devenue Ap ; NM, nm ; PM demeurant la même. C'eſt-à-dire que dans la valeur de $\mu r = z + \vartheta\,dy$, il faudra mettre au lieu de z, nm, ou $z + \omega\,dx$, & au lieu de ϑ, ce que devient cette fonction, ſi l'on y ſubſtitue $x + dx$ pour x & $z + \omega\,dx$ pour z. Par cette opération on aura $lk = z + \omega\,dx + \vartheta\,dy + \frac{d\vartheta}{dx}\,dx\,dy + \frac{d\vartheta}{dz}\,\omega\,dx\,dy$.

On cherchera 2°. la valeur de lk priſe pour ordonnée de la courbe qr ; & pour l'avoir, on ſubſtituera dans $nm = z + \omega\,dx$, $r\mu$, ou $z + \vartheta\,dy$ au lieu de z, & dans la fonction ω on ſubſtituera pour y, $y + dy$, & pour z, $z + \vartheta\,dy$, x demeurant conſtant. Par cette voye on aura $lk = z + \vartheta\,dy + \omega\,dx + \frac{d\omega}{dy}\,dy\,dx + \frac{d\omega}{dz}\,\vartheta\,dy\,dx$. Donc $z + \omega\,dx + \vartheta\,dy + \frac{d\vartheta}{dx}\,dx\,dy + \frac{d\vartheta}{dz}\,\omega\,dx\,dy = z + \vartheta\,dy$,

$+\omega dx + \frac{d\omega}{dy} dy dx + \frac{d\omega}{dz} \vartheta dy dx$; ou bien en réduiſant $\frac{d\vartheta}{dx} + \omega \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{d\omega}{dy} + \vartheta \frac{d\omega}{dz}$. Donc il faut que cette équation ait lieu, pour que celle-ci $dz = \omega dx + \vartheta dy$ exprime une ſurface courbe poſſible.

XXXVIII.

COROLLAIRE. Il ſuit de là que l'équation $\frac{d\vartheta}{dx} + \omega \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{d\omega}{dy} + \vartheta \frac{d\omega}{dz}$ doit être la même que l'équation $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} - \frac{BdA}{dz} - \frac{AdC}{dy} + \frac{CdA}{dy} = 0$; c'eſt ce qu'il eſt aiſé de vérifier : car puiſque l'équation $dz = \omega dx + \vartheta dy$ eſt la même que $Adx + Bdy + Cdz = 0$, ou que $dz = -\frac{Adx}{C} - \frac{Bdy}{C}$, il faut que $\omega = -\frac{A}{C}$, & que $\vartheta = -\frac{B}{C}$, $d\omega = \frac{AdC - CdA}{CC}$, $d\vartheta = \frac{BdC - CdB}{CC}$. Donc en ſubſtituant ces valeurs dans l'équation $\frac{d\vartheta}{dx} + \omega \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{d\omega}{dy} + \vartheta \frac{d\omega}{dz}$, on aura l'équation $\frac{BdC}{CCdx} - \frac{CdB}{CCdx} + \frac{AdB}{CCdz} - \frac{ABdC}{C^3 dz} = \frac{AdC}{CCdy} - \frac{CdA}{CCdy} + \frac{BdA}{CCdz} - \frac{ABdC}{C^3 dz}$, & en réduiſant $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} = \frac{AdC}{dy} - \frac{CdA}{dy} + \frac{BdA}{dz}$, la même que nous avons trouvée plus haut.

XXXIX.

SCHOLIE. Il eſt évident maintenant que lorſque l'équation $\frac{BdC}{dx}$ — &c. n'a pas lieu, la propoſée $Adx + Bdy + Cdz = 0$, n'exprime aucune ſurface courbe; mais pour être certain que la ſurface courbe eſt poſſible, ſi l'équation $\frac{BdC}{dx}$ — &c. a lieu, il faut s'aſſurer que toutes

les fois que l'on a cette équation, on a le même x, ſoit qu'on le prenne dans la tranche des y & des x, ſoit qu'on le prenne dans la tranche des z & des x.

Pour reconnoître que cela ſera ainſi, il faut obſerver que le calcul qui exprimeroit cette nouvelle condition, ne différeroit de celui que nous venons de faire, qu'en ce qu'on auroit des x au lieu des z, & C au lieu de A. Si donc on pratique cette opération, l'équation $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} - \frac{BdA}{dz} - \frac{AdC}{dy} + \frac{CdA}{dy} = 0$ deviendra celle-ci $\frac{BdA}{dz} - \frac{AdB}{dz} + \frac{CdB}{dx} - \frac{BdC}{dx} - \frac{CdA}{dy} + \frac{AdC}{dy} = 0$; qui eſt la même abſolument que la précédente, en changeant les ſignes & tranſpoſant.

Par cette voie l'on démontreroit auſſi qu'on trouveroit le même y en le cherchant ſoit dans la tranche des y & des z, ſoit dans la tranche des x & des y.

XL.

Maniere de trouver le facteur qui peut rendre complete une équation différentielle à trois variables, lorſqu'elle eſt ſuſceptible d'intégration ou de conſtruction.

Après avoir donné la méthode qui nous fera reconnoître celles d'entre les équations différentielles à trois variables qui ne peuvent être ni intégrées ni conſtruites, il faut apprendre à déterminer le facteur qui rendra completes celles qui ſont ſuſceptibles d'intégration ou de conſtruction; mais auparavant il eſt néceſſaire de faire les remarques ſuivantes qui ſuivent de la différentiation des quantités.

On remarquera d'abord que la plupart des fonctions qui n'ont pas un certain facteur commun à tous leurs termes, n'ont pas non plus ce même facteur à leurs différentielles.

On remarquera en ſecond lieu que ſi une fonction a un dénominateur, ſa différentielle aura auſſi un dénominateur qui ſera un multiple de celui de l'intégrale.

D'après ces obſervations, mettons au lieu de μ, $\frac{P}{Q}$, P & Q étant deux fonctions ſans diviſeurs, P ſera un facteur de la fonction φ cherchée, dont la différence eſt $\frac{PA}{Q}dx + \frac{PB}{Q}dy + \frac{PC}{Q}dz$, & Q contiendra le dénominateur de la même fonction φ.

J'imagine que la différentielle eſt diviſée par l'intégrale, P s'en ira du numérateur & Q ſe diviſera par le dénominateur. Il ne reſtera par conſéquent après ſa diviſion, pour le dénominateur commun à tous les termes, qu'une fonction R d'un degré de plus que celui de A, B, C: nous diſons d'un degré de plus, parce que la quantité $\frac{Adx+Bdy+Cdz}{R}$ qui vient par cette diviſion, eſt égale à $\frac{d\varphi}{\varphi}$, ou à la différence du logarithme de la fonction cherchée, & que par conſéquent elle doit être d'un degré au deſſous de l'unité.

Pour trouver R, on le prendra égal à la fonction poſitive, c'eſt-à-dire ſans diviſeurs, la plus générale d'un degré au deſſus de A, avec des coefficiens indéterminés; s'il y a des radicaux dans A, B, C, il faut auſſi qu'ils entrent dans R, en ſe combinant avec x, y, z, de toutes les manieres poſſibles.

On fera enſuite les trois équations ſuivantes:

$$\frac{RdA}{dy} - \frac{AdR}{dy} = \frac{RdB}{dx} - \frac{BdR}{dx},$$

$\frac{RdB}{dx}$

$$\frac{R\,dB}{dz} - \frac{B\,dR}{dz} = \frac{R\,dC}{dy} - \frac{C\,dR}{dy},$$
$$\frac{R\,dA}{dz} - \frac{A\,dR}{dz} = \frac{R\,dC}{dx} - \frac{C\,dR}{dx},$$

afin de déterminer par leurs secours les coefficiens indéterminés de la fonction R. Mais entre ces trois équations on choisira les deux qui paroîtront donner moins de calcul, la troisieme étant inutile. Car il est aisé de voir que si l'on s'est assuré au moyen de l'équation $B\frac{dC}{dx} - C\frac{dB}{dx} +$ &c. que l'équation $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$ est possible; il arrivera que la fonction R qui convient à deux des trois équations précédentes conviendra aussi à la troisieme.

Après avoir déterminé par le secours de ces deux équations les coefficiens de R, & par conséquent R même; on intégrera $\frac{A\,dx + B\,dy + C\,dz}{R}$, par la méthode de l'article XXX. pour intégrer une différentielle qu'on sait être exacte. Ensuite on égalera l'intégrale trouvée à une constante, & l'on aura l'intégrale de la proposée.

XLI.

Application du Théorême aux différentielles qui ont 4, 5, &c. variables.

Appliquons maintenant le Théorême aux quantités & aux équations différentielles qui renferment quatre, cinq &c. variables.

Soit la différentielle $A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,du + E\,ds +$ &c. dans laquelle A, B, C, D, E, &c. expriment des fonctions de x, y, z, u, s, & de constantes; pour que cette quantité fasse une différentielle exacte, il faudra que deux des termes quelconques de cette quantité

faſſent toujours une différentielle complete, en ne regardant comme variables que les deux ſeules lettres dont les différentielles ſe trouvent dans ces deux termes. On aura donc autant d'équations comme $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$ &c. à vérifier, qu'il y a de manieres de combiner deux à deux les fonctions A, B, C, &c. Si ces équations ont lieu, la propoſée ſera intégrable; autrement elle ne le ſera pas. Dans le premier cas le procédé à ſuivre pour en trouver l'intégrale ſera le même à peu près que celui que nous avons pratiqué, (Art. XXX.) pour les différentielles à trois variables; il n'y aura de différence que dans la longueur du Calcul.

XLII.

Procédé pour les équations à 4, 5, &c. variables.

A l'égard des équations telles que $Adx + Bdy + Cdz + Ddu + Eds +$ &c. $= 0$ qui repréſente une équation quelconque compoſée de x, y, z, u, s, &c. avec leurs différentielles & des conſtantes; on verra d'abord ſi cette équation dans l'état où elle eſt propoſée, eſt une différentielle complete, & la maniere de s'en aſſurer ſera de vérifier autant d'équations $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$ &c. qu'il y a de façons poſſibles de combiner deux à deux les lettres A, B, C, D, E, &c. Si l'équation propoſée n'eſt pas une différentielle complete, il faut examiner ſi elle peut le devenir. Pour faire cet examen je prends à volonté trois termes de la propoſée, & les égalant à zéro, je vois s'ils forment une équation poſſible, en obſervant toutefois d'y regarder comme conſtantes toutes les lettres, excepté

Méthode pour s'aſſurer ſi elles peuvent devenir completes, lorſqu'elles ne le ſont pas.

Nombre d'équations à vérifier.

les trois dont les différentielles ſe trouvent dans ces trois termes. Donc en pratiquant ce qui a été dit (Art. xxxiv.) pour les équations à trois variables, on voit aiſément qu'on aura autant d'équations à vérifier comme $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} - \frac{BdA}{dz} - \frac{AdC}{dy} + \frac{CdA}{dy} = 0$, qu'il aura de manieres de combiner trois à trois les fonctions A, B, C, D, E, &c. Lorſque toutes les équations de la même nature que la précédente, venues par la combinaiſon des termes $Adx + Bdy + Cdz + Ddu +$ &c. pris trois à trois, auront en même temps lieu, on pourra rendre l'équation propoſée une différentielle complete.

XLIII.

Remarque. On peut cependant abreger le nombre de ces équations à vérifier, parce que quelques-unes ſuivent néceſſairement des autres. Pour le prouver je prends l'équation à quatre variables $Adx + Bdy + Cdz + Ddu = 0$. Cette équation par la combinaiſon des quatre lettres A, B, C, D priſes trois à trois me donnent les quatre équations ſuivantes:

Ce nombre peut quelquefois ſe diminuer.

Preuve ſur une équation à quatre variables.

1°. $Adx + Bdy + Cdz = 0$
2°. $Adx + Bdy + Ddu = 0$
3°. $Adx + Cdz + Ddu = 0$
4°. $Bdy + Cdz + Ddu = 0$

De la premiere équation on tire en ſuivant le calcul de l'Article xxxiv. $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} - \frac{BdA}{dz} - \frac{AdC}{dy} + \frac{CdA}{dy} = 0$; la ſeconde nous donne en ſuivant le même

calcul $\frac{BdD}{dx} - \frac{DdB}{dx} + \frac{AdB}{du} - \frac{BdA}{du} - \frac{AdD}{dy} + \frac{DdA}{dy} = 0$; la troiſieme nous donne $\frac{CdD}{dy} - \frac{DdC}{dy} + \frac{AdC}{du} - \frac{CdA}{du} - \frac{AdD}{dz} + \frac{DdA}{dz} = 0$; & enfin on tire de la quatrieme, $\frac{CdD}{dy} - \frac{DdC}{dy} + \frac{BdC}{du} - \frac{CdB}{du} - \frac{BdD}{dz} + \frac{DdB}{dz} = 0$.

Or on voit aiſément que ſi on prend trois de ces équations à volonté, la quatrieme s'enſuit néceſſairement; donc pour s'aſſurer ſi une équation à quatre variables peut devenir complete, il ſuffira de vérifier trois des équations de condition qu'elle donne.

XLIV.

COROLLAIRE. En faiſant le même raiſonnement ſur les équations à cinq variables, on verra que des dix équations de condition que donne la combinaiſon des fonctions A, B, C, D, E, priſes trois à trois, ſix ſuffiront pour déterminer ſi l'intégration ou la conſtruction eſt poſſible. De même ſi la propoſée avoit ſix variables, telles que la ſuivante $Adx + Bdy + Cdz + Ddu + Eds + Fdr = 0$, des vingt équations de condition que donne la combinaiſon des ſix lettres A, B, C, D, E, F, priſes trois à trois, il ſuffira d'en vérifier dix.

Donc en général le nombre des variables contenues dans une équation différentielle étant m, le nombre d'équations néceſſaires à vérifier pour ſavoir ſi la propoſée peut devenir complete, ſera ce que le nombre $m - 1$ peut donner de combinaiſons deux à deux; c'eſt-à-dire $\frac{(m-1).(m-2)}{2}$.

XLV.

Lorſque par les procédés que nous venons d'indiquer on aura reconnu que les équations à trois, quatre, cinq, &c. variables peuvent être rendues completes, il faudra chercher le facteur qui doit pour cela multiplier tous les termes de l'équation. Nous ne détaillerons pas ici la méthode de trouver ce facteur; le lecteur qui ſera curieux de la connoître la trouvera dans le mémoire que nous avons déja cité dans ce Chapitre.

XLVI.

Maintenant on eſt en état de s'aſſurer ſi une quantité ou une équation différentielle eſt intégrable ou non; & l'on voit que cette connoiſſance doit épargner beaucoup de peines ſouvent inutiles. Avant que de commencer le détail des méthodes particulieres, il eſt bon d'obſerver qu'il y a des équations différentielles qui ont une intégrale algébrique, d'autres qu'on ne peut intégrer algébriquement, mais dont on parvient à ſéparer les indéterminées. Nous allons d'abord examiner comment on conſtruit les équations dans leſquelles les indéterminées ſont ſéparées; enſuite nous traiterons des différentielles qui s'intégrent en les multipliant ou les diviſant par des fonctions de leurs indéterminées, ou en opérant ſur elles par les transformations enſeignées dans le ſecond Chapitre de la premiere Partie. De là nous détaillerons les méthodes différentes de ſéparer les indéterminées dans les équations différentielles.

CHAPITRE III.

De la conſtruction des équations différentielles dans leſquelles les indéterminées ſont ſéparées.

XLVII.

Ce qu'il faut faire avant que de conſtruire l'équation.

LEMME. DAns une équation différentielle qu'on veut conſtruire, il faut d'abord mettre d'un côté les dx & de l'autre les dy; alors l'équation ſera de cette forme $Xdx = Ydy$ (X exprimant une fonction quelconque de x, & Y une fonction quelconque de y). Quand les deux membres de cette équation ne ſont pas intégrables, alors on la conſtruit par les quadratures: nous allons donner la méthode qu'il faut ſuivre pour cela. Mais nous obſerverons auparavant de quelle maniere on trouve le nombre des dimenſions d'une quantité quelconque X, formée de x & de conſtantes. Par exemple, ax^3 eſt de quatre dimenſions, de même que $ax^3 + b^2x^2$; $\sqrt{(x^4 + c^3x)}$ eſt de deux; $\frac{ax^3 + b^2x^2 + g^2\sqrt{(x^4 + c^3x)}}{\sqrt{(ex + ff)}}$ eſt de trois, parce que le numérateur eſt de quatre & le dénominateur de une; & ainſi de ſuite.

XLVIII.

Procédé pour faire la conſtruction.

PROBLEME. Conſtruire une équation différentielle dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées.

SOLUTION. Je prends le nombre des dimenſions de

X & de Y, nombre qui doit être le même. Si tous les termes n'avoient pas en apparence la même dimenſion, ils doivent être cenſés l'avoir, parce que ceux qui ont la plus petite dimenſion, doivent être cenſés multipliés par une puiſſance convenable d'une ligne conſtante, qu'on prend pour l'unité.

Soit le nombre des dimenſions repréſenté par n, je diviſe mon équation par a^n (a eſt une conſtante quelconque.) J'ai donc $\frac{Y\,dy}{a^n} = \frac{X\,dx}{a^n}$. Pour conſtruire cette équation, ſoient AP, AQ perpendiculaires l'une à l'autre ; Figure 4.
ſoit une courbe EK telle que . . . . . $AP = x$

$$PK = \frac{X}{a^{n-1}},$$

l'aire de la courbe . . . . . $APKE = \int \frac{X\,dx}{a^{n-1}}$.

Soit encore la courbe TD, telle qu'on ait $AQ = y$

$$QT = \frac{Y}{a^{n-1}},$$

l'aire de la courbe . . . . . $AQTD = \int \frac{Y\,dy}{a^{n-1}}$,

Maintenant ſuppoſons qu'on ait . . . $au = \int \frac{X\,dx}{a^{n-1}}$,

on en tirera . . . . . $u = \int \frac{X\,dx}{a^n}$,

enſuite on tracera une courbe GN telle que $PN = u$;

ſuppoſons de même que . . . . . $at = \int \frac{Y\,dy}{a^{n-1}}$,

on aura . . . . . $t = \int \frac{Y\,dy}{a^n}$,

& ſoit la courbe SO telle que . . . $SQ = t$.

Il faut donc que $t = u$.

Ayant pris $AH = QS$, on menera AI ſous un angle

de 45° ; puis tirant HI parallele à AQ, du point I on menera IN parallele à AP qui déterminera le point N, tel que $PN(u) = QS(t)$, & par conſéquent $\int \frac{X\,dx}{a^n} = \int \frac{Y\,dy}{a^n}$. Donc ſi on prolonge SQ & PN juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en M, le point M ſera à la courbe qu'exprime l'équation propoſée.

XLIX.

REMARQUE 1. Quelquefois il eſt néceſſaire d'ajouter une conſtante ; c'eſt la nature du Problême qui doit ſervir à la déterminer : on n'ajoutera cette conſtante que d'un ſeul côté ; car il ſeroit inutile d'en ajouter des deux côtés à la fois, puiſque l'on pourroit regarder ces deux conſtantes comme n'en faiſant qu'une.

L.

REMARQUE 2. Si l'un des deux membres de l'équation différentielle propoſée étoit intégrable, alors ce membre dépendroit d'une courbe quarrable, & l'autre membre ſe conſtruiroit de la maniere que nous venons d'expoſer. Par exemple, ſi l'on avoit l'équation $dx\sqrt{px} = Y\,dy$ (Y exprimant une fonction de y, telle que le ſecond membre ne ſoit pas intégrable algébriquement) l'intégration de cette équation donne $\frac{2x\sqrt{px}}{3} = \int Y\,dy$. On auroit le premier membre en traçant une parabole dont l'équation ſeroit $yy = px$, & l'autre membre ſe conſtruiroit comme dans le Problême.

CHAPITRE

CHAPITRE IV.

De la ſéparation des indéterminées dans les équations différentielles par les regles ordinaires de l'Algebre, ou par de ſimples transformations.

LI.

IL eſt aiſé de ſentir qu'en ſéparant les indéterminées dans une équation différentielle, on la réduit aux cas de la premiere Partie ; puiſqu'alors on peut regarder chaque membre de l'équation, comme une différentielle particuliere qui ne contient qu'une variable. C'eſt cette opération que nous allons maintenant pratiquer ; d'abord pour des équations différentielles aſſez ſimples ; nous paſſerons enſuite aux plus compoſées.

LII.

Exemples de cette ſéparation par les regles ordinaires de l'Algebre.

1°. Si on avoit des équations de la forme ſuivante $aaxdx + yyxdx = ydy\sqrt{(xx+ff)}$, qui équivaut à la ſuivante $(aa+yy).xdx = ydy\sqrt{(xx+ff)}$; on verroit au premier coup d'œil que les indéterminées s'y ſéparent par une ſimple diviſion : car on a $\frac{xdx}{\sqrt{(xx+ff)}} = \frac{ydy}{aa+yy}$; dont l'intégrale eſt, comme on le ſait, $(xx+ff)^{\frac{1}{2}} = l(aa+yy)^{\frac{1}{2}} + C$.

Premier exemple.

LIII.

Second exemple. De même l'équation $\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(a^5+y^5)}} = \frac{y\,dy}{\sqrt[4]{(b^4-x^4)}}$ devient par la seule multiplication $x\,dx\,.\,(b^4-x^4)^{\frac{1}{4}} = y\,dy\,.\,(a^5+y^5)^{\frac{1}{5}}$; équation dans laquelle les indéterminées sont séparées, & que l'on construira par la méthode enseignée plus haut.

LIV.

Troisieme exemple. Que j'aie $xx\,dx^2 + xy\,dx\,dy = aa\,dy^2$; je remarque que le premier membre de cette équation seroit un quarré, s'il y avoit de plus $\frac{yy\,dy^2}{4}$. J'ajoute donc de part & d'autre cette quantité, & l'équation devient $xx\,dx^2 + xy\,dx\,dy + \frac{yy\,dy^2}{4} = aa\,dy^2 + \frac{yy\,dy^2}{4}$. Je prends la racine quarrée, ce qui me donne $x\,dx + \frac{y\,dy}{2} = \pm\, dy \times \left\{\frac{yy}{4} + aa\right\}^{\frac{1}{2}}$; équation dans laquelle les indéterminées sont séparées. L'intégrale de cette équation est $\frac{xx}{2} + \frac{yy}{4} \mp \int\left\{dy\sqrt{\left(\frac{yy}{4}+aa\right)}\right\} + C = 0$, dont la partie qui est sous le signe $\int$ dépend de la quadrature d'une hyperbole équilatere par rapport à son second axe, l'origine des coordonnées étant au centre de la courbe.

Il en est ainsi d'un grand nombre d'autres équations différentielles qu'il est inutile de détailler ici.

LV.

Exemples de cette même séparation par 2°. Pour séparer les indéterminées dans l'équation suivante $a\,dx = y\,dy - x\,dy$; on fera $y - x = z$, ou $y =$

$z+x$; $dy=dz+dx$. Après les ſubſtitutions, l'équation propoſée deviendra $adx=zdz+zdx$; ou $adx-zdx=zdz$. Donc en diviſant par $a-z$, on a $dx=\frac{zdz}{a-z}$; équation dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées; & qui a pour intégrale $x=a-z+l(a-z)^{-a}+C$. Remettant pour z ſa valeur $y-x$, on aura $x=a-y+x+l\frac{1}{(a-y+x)^a}+C$ pour l'intégrale cherchée. On verra d'ailleurs plus bas une méthode pour intégrer cette équation ſans transformation. Voyez le Chap. VII. des transformations. Premier exemple.

LVI.

Soit l'équation $aadx=x^2dy+2xydy+yydy$; je fais $x+y=z$: j'en tire $dx+dy=dz$. La propoſée devient donc $aadz-aady=z^2dy$; c'eſt-à-dire $\frac{aadz}{zz+aa}=dy$: j'integre maintenant, & j'ai $y=\int\frac{aadz}{zz+aa}$; le ſecond membre dépendant (Art. CVII. de la Ire Partie,) de la quadrature du cercle. Second exemple.

LVII.

Si la propoſée étoit $(xdy+ydx)\times(a^4-xxyy)^{\frac{1}{2}}=\frac{xdx+ydy}{(xx+yy)^{\frac{1}{2}}}$, je remarque que dans le premier membre de cette équation $xdy+ydx$ eſt la différentielle de xy & que le quarré de cette intégrale ſe trouve dans la quantité ſous le ſigne. Je fais donc $xy=z$, & j'ai pour premier membre de ma transformée $dz.(a^4-zz)^{\frac{1}{2}}$ qui eſt tel que je le demande. Je vois de plus que dans le ſecond Troiſieme exemple.

$= 1 + \frac{y^2dy^2 - x^2dy^2}{y^2dx^2 - 2xydydx + x^2dy^2}$. Donc $\left(\frac{y^2}{Y^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{dy\sqrt{(y^2-x^2)}}{ydx - xdy}$; ou bien $\frac{Y}{(y^2-Y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{ydx - xdy}{dy\sqrt{(y^2-x^2)}}$. Soit maintenant $\frac{x}{y} = z$, on aura $ydx - xdy = yydz$; & après les ſubſtitutions la transformée ſera $\frac{Y}{(y^2-Y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{ydz}{dy\sqrt{(1-zz)}}$. Donc enfin $\frac{Ydy}{y\sqrt{(y^2-Y^2)}} = \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}}$.

Paſſons maintenant à des cas plus généraux dans leſquels les indéterminées ſe ſéparent encore par de ſimples transformations.

LXII.

Cas plus généraux que les précédens qui s'integrent de même. Premiere formule.

PROBLEME 1. Séparer les indéterminées dans la formule générale $\frac{ay^{n-1}dy}{b+(cy^n+p)^\alpha} = gqdx$, p & q étant des fonctions de x telles que $q = \frac{dp}{dx}$.

SOLUTION. Soit $(cy^n+p)^\alpha = z$; on en tire $cy^n + p = z^{\frac{1}{\alpha}}$, & en différentiant & mettant pour dp ſa valeur qdx, on aura $y^{n-1}dy = \frac{1}{\alpha cn} z^{\frac{1}{\alpha}-1}dz - qdx$. Donc $\frac{ay^{n-1}dy}{b+(cy^n+p)^\alpha} = \frac{\frac{a}{\alpha}z^{\frac{1}{\alpha}-1}dz - aqdx}{cn.(b+z)} = gqdx$.

Donc enfin $\frac{az^{\frac{1}{\alpha}-1}dz}{\alpha bcgn + \alpha cgnz + a\alpha} = qdx$, équation dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées.

LXIII.

Application à un exemple.

Soit dans la formule précédente . . . . . $b = 2g$

$a = f^3$

$n = 1$

$p = bx$

$q = b$

$\alpha = \frac{1}{2}$,

l'équation ſera $\frac{f^3 dy}{2g+(cy+bx)^{\frac{1}{2}}} = bg\,dx$. Je ferai donc $(cy+bx)^{\frac{1}{2}} = z$; j'aurai $y = \frac{zz-bx}{c}$; $dy = \frac{2z\,dz-b\,dx}{c}$; & pour transformée, l'équation ſuivante $\frac{2f^3 z\,dz - bf^3\,dx}{c.(2g+z)} = bg\,dx$; ou $2f^3 z\,dz - bf^3\,dx = 2bcg^2\,dx + bcgz\,dx$. Donc $\frac{2f^3 z\,dz}{2cg^2+f^3+cgz} = b\,dx$; équation réduite en fraction rationelle.

LXIV.

PROBLEME 2. Trouver les cas d'intégrabilité de l'équation $\frac{y^\alpha dx}{(bx^t+ay^n x^r)^m} = cx^q dy$; a, b, c, étant des conſtantes. Seconde formule plus générale.

SOLUTION. Soit $(bx^t+ay^n x^r)^m = zx^{mt}$; on aura la transformée ſuivante $\frac{(z^{\frac{1}{m}}x^{t-r} - bx^{t-r})^{\frac{\alpha}{n}} dx}{a^{\frac{\alpha}{n}} z x^{mt}} = \frac{cx^q}{a^{\frac{1}{n}}} \times (z^{\frac{1}{m}}x^{t-r} - bx^{t-r})^{\frac{1}{n}-1} \times \left\{\frac{1}{m}x^{t-r}z^{\frac{1}{m}-1}dz + (t-r)\,z^{\frac{1}{m}}x^{t-r-1}dx - (t-r)\,bx^{t-r-1}dx\right\}$, ou bien, en diviſant par $(z^{\frac{1}{m}}x^{t-r} - bx^{t-r})^{\frac{1}{n}-1}$, $a^{\frac{1}{n}} mn\, x^{\frac{\alpha t}{n} - \frac{\alpha r}{n} + t - r - \frac{t}{n} + \frac{r}{n}} . (z^{\frac{1}{m}} - b)^{\frac{\alpha}{n}+1-\frac{1}{n}} dx = a^{\frac{\alpha}{n}} cx^{q+mt+t-r-1+s} z^{\frac{1}{m}} dz + (t-r) \times$

$a^{\frac{\alpha}{n}} m z^{\frac{1}{m}+1} x^{q+mt+t-r-1} dx - (t-r) a^{\frac{\alpha}{n}} bmzx^{q+mt+t-r-1} dx.$

Or il eſt évident que ſi dans cette équation $\frac{\alpha t}{n} - \frac{\alpha r}{n} - \frac{t}{n} + \frac{r}{n} = q + mt - 1$, les indéterminées ſe ſépareront; car alors on aura $\frac{mdx}{x} = \frac{a^{\frac{\alpha}{n}} c z^{\frac{1}{m}} dz}{a^{\frac{1}{n}} n.(z^m - b)^{\frac{k}{n}-1} - (t-r) a^{\frac{\alpha}{n}} z^{\frac{1}{m}+1} + (t-r) a^{\frac{\alpha}{n}} bz}$; donc les indéterminées ſe ſépareront dans la propoſée toutes les fois qu'on aura $\alpha = \frac{nq+nmt-n+t-r}{t-r}$; ou bien $q = \frac{\alpha t - \alpha r - mnt + n - t + r}{n}$.

LXV.

Application à un exemple.

Soit dans la formule . . . . . $\alpha = 2$
$t = 2$
$n = 1$
$r = 1$
$m = \frac{1}{2}$

on aura l'équation ſuivante $\frac{hy^2 dx}{(bbxx+gxy)^{\frac{1}{2}}} = xdy$. Je fais $(bbxx+gxy)^{\frac{1}{2}} = xz$; ce qui me donne la transformée ſuivante $\frac{hdx}{g^2} \cdot \frac{(z^2x-bbx)^2}{zx} = \frac{x}{g} \times (2xzdz - bbdx + z^2dx)$, & après la réduction on aura $hdx \times (z^4 - 2b^2z^2 + b^4) = 2gxz^2dz - bg^2zdx + gz^3dx$. Donc $\frac{dx}{x} = \frac{2gz^2dz}{hz^4 - 2kb^2z^3 + hb^4 - gz^3 + b^2gz}$.

Il en ſera de même pour beaucoup d'autres équations particulieres. Je paſſe maintenant à pluſieurs cas généraux dans leſquels les indéterminées ſe ſéparent par des méthodes qui leur ſont propres.

CHAPITRE

CHAPITRE V.

De la ſéparation des indéterminées dans les équations homogenes.

LXVI.

DÉFINITION. ON appelle *équations homogenes* celles dans leſquelles la ſomme des dimenſions des x & des y, ou ſéparées, ou priſes enſemble, eſt la même dans tous les termes de l'équation. Telles ſont les ſuivantes, $xxdy + gyydx = fz^2du + au^2dz$, ou bien $xydx + byydx = 'gx^2dy + hxydy$. Telle eſt encore la ſuivante $dx\,(x\sqrt{x^4+y^4} + gy^2\sqrt[3]{xy^2+x^3}) = dy\,\{ax^3 + by^2x + gy^2\sqrt{(xx+yy)}\}$ &c. Cela poſé. Ce que c'eſt qu'une équation *homogene*.

LXVII.

PROBLEME. Séparer les indéterminées dans les équations homogenes, à deux variables. Solution générale du Problême.

SOLUTION. Soit miſe l'équation ſous cette forme $\frac{dx}{dy} = \frac{p}{q}$, p exprimant le numérateur du ſecond membre & q le dénominateur. Il eſt évident 1°. qu'en faiſant $x = yz$, on aura $\frac{dx}{dy} = \frac{ydz}{dy} + z$. 2°. Qu'en ſubſtituant pour x ſa valeur yz dans p & dans q, y ſe trouvera à la même dimenſion dans tous les termes de p & dans ceux de q; par exemple, ſi $\frac{p}{q} = \frac{gx^2+hxy}{xy+byy}$; mettant pour x

ſa valeur yz on aura $\frac{gy^2z^2+hzy^2}{zy^2+by^2}$, fraction dans laquelle y a la même dimenſion dans tous les termes du numérateur & du dénominateur. Donc on pourra faire diſparoître de l'un & de l'autre, y; & $\frac{p}{q}$ ſe réduira à une quantité Z qui ne contiendra que z & des conſtantes. Donc on aura $\frac{ydz}{dy}+z=Z$, ou bien $\frac{dy}{y}=\frac{dz}{Z-z}$, équation dans laquelle tout eſt ſéparé.

LXVIII.

Application à un exemple.

Soit à intégrer l'équation homogene $xdx\sqrt{(x^4+y^4)}+gy^2dx\sqrt[3]{(xy^2+x^3)}=ax^3dy+by^2xdy+qy^2dy\sqrt{x^2+y^2}$; je la mets ſous la forme ſuivante, $\frac{dx}{dy}=\frac{ax^3+by^2x+qy^2\sqrt{x^2+y^2}}{x\sqrt{(x^4+y^4)}+gy^2\sqrt[3]{xy^2+x^3}}$, je fais $x=yz$; j'aurai par conſéquent en ſubſtituant dans cette équation pour x & dx leurs valeurs $\frac{ydz}{dy}+z=\frac{az^3+bz+q\sqrt{z^2+1}}{z\sqrt{z^4+1}+g\sqrt[3]{z+z^3}}$, ou bien $\frac{dy}{y}=\frac{dz}{\frac{az^3+bz+q\sqrt{z^2+1}}{z\sqrt{(z^4+1)}+g\sqrt[3]{(z+z^3)}}-z}$, équation dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées.

LXIX.

Cette regle s'étend à toutes les équations homogenes, à quelque puiſſance qu'y ſoient élevées les dx & les dy.

REMARQUE 1. Si dans l'équation homogene les dx & les dy étoient élevées à une puiſſance au-deſſus du premier dégré, on ſuivroit la même regle pour ſéparer les indéterminées.

Soit, par exemple, $xxdy^2+xydx^2=yydx^2$; on

donnera à cette équation la forme ſuivante, $dy^2 = dx^2\left(\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}\right)$; donc $dy = \pm dx\sqrt{\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}}$. Soit donc $\frac{y}{x} = \frac{z}{a}$, on en tire $ady = xdz + zdx$; & auſſi $ady = dx\sqrt{(zz - az)}$. Donc $xdz + zdx = dx\sqrt{(zz - az)}$. Donc enfin $\frac{dx}{x} = \frac{-dz}{z - \sqrt{(zz - az)}}$.

LXX.

Que l'équation propoſée ſoit $x^2dy^2 + xydxdy = x^2dx^2$, on remarquera que le premier membre ſeroit un quarré, s'il contenoit de plus $\frac{yydx^2}{4}$. J'ajoute donc ce terme de part & d'autre, & après avoir extrait la racine quarrée, la propoſée devient $xdy + \frac{1}{2}ydx = \pm dx\sqrt{(xx + \frac{yy}{4})}$, équation qui eſt dans le cas de notre Problême, & qui devient par conſéquent intégrable ou conſtructible par la méthode précédente.

LXXI.

Cette derniere méthode n'eſt applicable qu'aux équations dans leſquelles dy^2 ou dx^2 ne montent qu'au ſecond degré, & dans leſquelles par conſéquent on peut trouver la valeur de $\frac{dy}{dx}$. On trouvera plus bas (Art. CLIV.) une méthode pour les cas plus compoſés.

LXXII.

Remarque 2. La méthode que nous venons d'expoſer pour les équations homogenes à deux changeantes

Elle s'étend auſſi aux équations homogenes qui

contiennent plus de deux variables, en y faisant toutesfois quelque changement.

s'étendra aussi en y faisant quelques additions aux équations homogenes à trois ou à tant de variables qu'on voudra, pourvu que ces équations ne renferment point de constantes.

LXXIII.

Exemple général.

PROBLEME. Intégrer l'équation générale $Xdx + Ydy + Zdz = 0$, X, Y, Z représentent des fonctions homogenes & sans constantes de x, y, z. La méthode seroit la même si l'on avoit 4, 5 ou un plus grand nombre de variables.

SOLUTION. Je fais $y = xu$, & $z = xt$. On voit clairement qu'en substituant pour y & pour z leurs valeurs, X qui contient des x, des y & des z sans constantes, se changera en une nouvelle fonction composée de x élevée à une puissance du degré de la fonction X, & multipliée par une fonction de u & de t. De même la fonction Y sera changée en une nouvelle composée de x élevée encore à la même puissance, & multipliée par une autre fonction de u & de t; & ainsi de Z. Supposant donc que m représente le degré des fonctions X, Y, Z, & que F, G, H soient des fonctions différentes de u & de t, substituons pour X, $x^m F$, pour Y, $x^m G$, & pour Z, $x^m H$; mettons aussi pour dy sa valeur $xdu + udx$, & pour dz sa valeur $xdt + tdx$, il est évident qu'on aura la transformée suivante $x^m dx.(F + Gu + Ht) + x^{m+1} Gdu + x^{m+1} Hdt = 0$, ou en divisant tous les termes par $x^{m+1}.(F + Gu + Ht)$, on a $\frac{dx}{x} + \frac{Gdu + Hdt}{F + Gu + Ht} = 0$;

Or dans l'équation mise sous cette forme les x sont séparées des u & des t; car les fonctions F, G, H ne contiennent point de x. Il ne s'agit donc que de savoir (Chap. II.) si $\frac{G\,du + H\,dt}{F + Gu + Ht}$ est une différentielle complete, & de l'intégrer ensuite.

LXXIV.

Soit dans la formule précédente . . . . $X = xy^2z^3$ Exemple particulier.
$Y = zx^2y^3$
$Z = y^2x^2z^2$
on aura . . . . . $m = 6$
& l'équation à intégrer sera $y^2z^3x\,dx + zx^2y^3\,dy + y^2x^2z^2\,dz = 0$. Je fais $y = xu$ & $z = xt$, on aura $x^6t^3u^2\,dx + x^6tu^3\,dy + x^6t^2u^2\,dz = 0$, dans laquelle x est, comme on voit, élevée dans chaque terme au même degré que les fonctions X, Y, Z. Maintenant substituons pour dy & dz leurs valeurs, on aura la transformée suivante $(2u^2t^3 + u^4t)\,dx + xtu^3\,du + xu^2t^2\,dt = 0$, ou enfin $\frac{dx}{x} + \frac{u\,du + t\,dt}{uu + tt} = 0$.

LXXV.

Après avoir exposé cette méthode de séparer les indéterminées dans les équations homogenes, nous allons détailler plusieurs moyens de rendre homogenes des équations qui ne l'étoient pas.

CHAPITRE VI.

Méthodes pour rendre homogenes des équations qui ne le ſont pas.

LXXVI.

Elles ſont au nombre de deux.

NOus allons ici expoſer deux méthodes qui ſervent à rendre homogenes des équations qui ne le ſont pas. La premiere conſiſte à ſe ſervir de ſubſtitutions convenables, & on ne peut lui donner aucune forme générale; ce ne ſera que par des exemples qu'on en montrera les uſages. La ſeconde conſiſte à changer les expoſants de la propoſée, de telle ſorte qu'on puiſſe déterminer dans quels cas & avec quelles ſubſtitutions on la rendra homogene. Ces deux méthodes rendront une infinité de différentielles ſuſceptibles de la ſéparation des indéterminées.

LXXVII.

Exemples de la premiere méthode.

Premier exemple.

Soit propoſée l'équation $dx\sqrt{(aaxx+az^3)} = zzdz$ qu'on voit bien n'être pas homogene. Je fais $z^3 = ayy$, ce qui me donne la transformée ſuivante, $dx\sqrt{(aaxx+aayy)} = \frac{2aydy}{3}$ qui eſt homogene.

LXXVIII.

On auroit encore pu rendre cette équation homogene

d'une autre maniere, en ſuppoſant $\sqrt{(aaxx+az^3)} = ay$, car alors on a tout de ſuite $aydx = \frac{2aydy}{3} - \frac{2axdx}{3}$, équation qui eſt homogene.

LXXIX.

Soit maintenant à intégrer l'équation ſuivante $z^3dz + \frac{z^3dx}{\sqrt{(a+x)}} = dx$: je ferai $\sqrt{(a+x)} = t$; donc $a+x = tt$, & $z^3dz + 2zzdt = 2tdt$. Soit maintenant $zz = yy$, j'aurai en ſubſtituant $\frac{ydy}{2} + 2ydt = 2tdt$, équation qui eſt homogene. Second exemple.

LXXX.

S'il s'agiſſoit de rendre homogenes les équations ſuivantes, $(a+bxy+cx^2y^2+ex^3y^3+\&c.)\,dx+(lx^2+mx^3y+nx^4y^2+\&c.)\,dy = 0$, ou bien $(ay+bxy^2+ex^2y^3+\&c.)\,dx+(lx+mx^2y+nx^3y^2+\&c.)\,dy = 0$, équations dans leſquelles la ſomme des expoſans eſt en progreſſion arithmétique, la ſubſtitution qu'il faudroit faire ſeroit celle-ci, $y = \frac{1}{z}$. Car il nous vient après l'avoir faite, $(a+\frac{bx}{z}+\frac{cx^2}{zz}+\frac{ex^3}{z^3}+\&c.)\,dx-(lx^2+\frac{mx^3}{z}+\frac{nx^4}{zz}+\&c.)\,\frac{dz}{zz} = 0$, & $(\frac{a}{z}+\frac{bx}{zz}+\frac{cx^2}{z^3}+\&c.)\,dx-(lx+\frac{mx^2}{z}+\frac{nx^3}{zz}+\&c.)\,\frac{dz}{zz} = 0$, équations qu'on voit bien être homogenes. Troiſieme exemple.

LXXXI.

Et en général ſi on avoit à intégrer l'équation ſuivante, $(ax^\pi+bx^\tau x^{\pi-1}+\&c.)\,dx+(mx^\pi z^{\tau-1}+nx^{\pi-1}z^{2\tau-1}$

$+ px^{\pi-2}z^{3\tau-1} +$ &c.) $dz = 0$, on rendroit cette équation homogene en faiſant $z = y^{\frac{1}{\tau}}$.

LXXXII.

Je paſſe à la ſeconde méthode.

Expoſition de la ſeconde méthode.

Premiere formule pour les équations à trois termes.

Soit l'équation générale compoſée de trois termes $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy = 0$, qui peut ſervir de formule, & dans laquelle les expoſans peuvent être poſitifs ou négatifs, entiers ou fractionaires. Si $n+m$ étoit $= q+p = r+s$, l'équation alors ſeroit homogene. Ainſi nous devons ſuppoſer qu'on n'a pas les égalités précédentes. Soit dans cette hypotheſe $y = z^t$, on a $dy = tz^{t-1}dz$, $y^s = z^{st}$ &c. & après les ſubſtitutions on aura la transformée $az^{nt}x^m dx + bz^{qt}x^p dx + ctx^r z^{st+t-1} dz = 0$. Mais pour que cette équation fût homogene, on devroit avoir $nt+m = qt+p = r+st+t-1$. De la premiere égalité on tire $t = \frac{p-m}{n-q}$, laquelle valeur ſubſtituée dans l'équation $qt+p = r+st+t-1$, ou $(s-q+1)t = p-r+1$, l'a fait devenir $(s-q+1).(p-m) = (p-r+1).(n-q)$. Cette derniere égalité exprime les conditions que doivent avoir entre eux les expoſants de la propoſée, pour qu'on la puiſſe rendre homogene. La ſubſtitution qu'il faudra faire dans ce cas eſt $y = z^{\frac{p-m}{n-1}}$.

Si au lieu de ſuppoſer $y = z^t$, on eût ſuppoſé $x = z^t$, on auroit trouvé le même réſultat pour la condition entre les

les exposants : la seule différence, c'est qu'alors on auroit $t = \frac{n-q}{p-m}$, ce qui rendroit la substitution à faire $x = z^{\frac{n-q}{p-m}}$.

LXXXIII.

Il peut arriver que la substitution de $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$ soit impossible; ce qui arrive dans le cas où $p = m$, ou $n = q$: mais alors on pourra séparer les indéterminées dans la proposée sans avoir recours à aucune préparation : car dans le cas où $p = m$, elle devient $x^{m-r}\,dx = -\frac{cy^s\,dy}{ay^n + by^q}$, ou $x^{p-r}\,dx = -\frac{cy^s\,dy}{ay^n + by^q}$; & dans celui de $n = q$, on a $ax^{m-r}\,dx + bx^{p-r}\,dx = -cy^{s-n}\,dy$, ou $-cy^{s-q}\,dy$.

LXXXIV.

Si dans la formule $ay^n x^m\,dx + by^q x^p\,dx + cx^r y^s\,dy = 0$, outre la supposition de $y = z^t$ on suppose encore $x = u^\alpha$; après les substitutions ordinaires, on trouvera $a\alpha z^{nt} u^{\alpha m + \alpha - 1}\,du + b\alpha z^{qt} u^{\alpha p + \alpha - 1}\,du + ctu^{\alpha r} z^{st + t - 1}\,dz = 0$; comparant ensemble les exposans du premier & du second terme, on a $nt + \alpha m + \alpha - 1 = qt + \alpha p + \alpha - 1$, d'où l'on tire $t = \alpha \cdot \left\{\frac{p-m}{n-q}\right\}$. L'équation entre les exposans du second & du troisieme terme nous donne $t \cdot (s - q + 1) = \alpha (p - r + 1)$, & mettant pour t sa valeur tirée de la premiere équation entre les exposants, on a $\alpha \cdot (p-m) \cdot (s-q+1) = \alpha \cdot (n-q) \cdot (p-r+1)$, équation qui exprime, comme ci-dessus, la condition que doivent avoir les exposants de la formule pour l'homogé-

néité : mais dans cette équation la lettre α se détruit dans tous les termes ; donc la seconde supposition de $x = u^{\alpha}$ étoit inutile.

LXXXV.

Application de la formule à une équation particuliere.

Soit proposée l'équation $ay^3 x\,dx + byy x^{\frac{3}{2}} - cx\,dy = 0$, je compare cette équation avec la formule précédente : cette comparaison me donne . . . . . $n = 3$

$m = 1$

$q = 2$

$p = \frac{3}{2}$

$r = 1$

$s = 0$

Dans ce cas l'équation de condition $(s - q + 1).(p - m) = (p - r + 1).(n - q)$ devient $-1 \times -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1$, ce qui est constant ; donc la proposée peut être rendue homogene. Je fais donc . . . . . $y = z^{\frac{p-m}{n-1}} = z^{-\frac{1}{2}}$

$dy = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} dz$

$y^3 = z^{-\frac{3}{2}}$

$yy = z^{-1}$

& après la transformation je trouve $\frac{a x dx}{z\sqrt{z}} + \frac{b dx \sqrt{x}}{z} + \frac{c x dz}{2z\sqrt{z}} = 0$, équation qui est homogene, comme on le voit au premier coup d'œil.

LXXXVI.

Seconde formule contenant les équations à quatre termes.

Si le nombre des termes de l'équation est plus grand que trois, les conditions que doivent avoir les exposants

des indéterminées augmentent à proportion. Soit, par exemple, l'équation ſuivante de quatre termes qui peut ſervir de formule $ax^m y^n dx + bx^q y^p dx + cx^r y^s dy + fx^s y^u dy = 0$, je fais $y = z^t$, d'où je tire $dy = tz^{t-1} dz$

$$y^n = z^{nt}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^p = z^{pt}$$
$$y^s = z^{st}$$
$$y^u = z^{tu}$$

Subſtituant ces valeurs on a $ax^m z^{nt} dx + bx^q z^{pt} dx + tcx^r z^{st+t-1} dz + ftx^s z^{tu+t-1} dz = 0$. On doit donc avoir, 1°. $nt + m = pt + q$, d'où l'on tire $t = \frac{q-m}{n-p}$. On doit avoir 2°. $r + st + t - 1 = pt + q$, ou $st - pt + t = q - r + 1$, & mettant pour t ſa valeur, on aura $(s - p + 1).(q - m) = (q - r + 1).(n - p)$; premiere condition que doivent avoir les expoſants de la propoſée. La comparaiſon du ſecond & du quatrieme terme donne $s + tu + t - 1 = pt + q$, ou $tu - pt + t = q - s + 1$, & mettant pour t ſa valeur trouvée précédemment, on a $(u - p + 1).(q - m) = (q - s + 1).(n - p)$, équation qui donne une ſeconde condition que doivent encore avoir entre eux les expoſants de la formule. S'ils ont ces deux conditions, alors elle pourra devenir homogene, & la ſubſtitution à faire eſt $y = z^{\frac{q-m}{n-p}}$.

. . . . . .

Si les équations propoſées ont cinq termes, alors leurs expoſants devront avoir entre eux trois conditions, & ainſi de ſuite.

LXXXVII.

Application de la formule à quelques équations particulieres.

Si on propoſe de rendre homogene l'équation $dx\sqrt{x} + dx\sqrt[3]{y^4} + y\,dy\sqrt[4]{x^3} - y^3\,dy = 0$; pour voir ſi elle eſt ſuſceptible de l'homogénéité, je la compare avec la formule, & j'ai . . . . . $m = \frac{1}{2}$

Premiere équation.

$$n = 0$$
$$q = 0$$
$$p = \frac{4}{3}$$
$$r = \frac{3}{4}$$
$$s = 1$$
$$\rho = 0$$
$$u = 3.$$

Donc l'équation $(s - q + 1).(q - m) = (q - r + 1).(n - p)$ qui eſt la premiere qui doit ſe trouver entre les expoſants eſt ici $(1 - \frac{4}{3} + 1).-\frac{1}{2} = (-\frac{3}{4} + 1).-\frac{4}{3}$, ou $-\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$, ce qui montre que les expoſants de notre équation ont déja la premiere condition requiſe. La ſeconde équation qui doit ſe trouver eſt celle-ci $(u - p + 1).(q - m) = (q - \rho + 1).(n - p)$: elle devient ici $(3 - \frac{4}{3} + 1) \times -\frac{1}{2} = 1 \times -\frac{4}{3}$; ou $-\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$; donc les expoſants de la propoſée ont les conditions requiſes pour qu'elle puiſſe être rendue homogene. Je fais donc . . . . . $y = z^{\frac{q-m}{n-p}} = z^{\frac{3}{8}}$

$$dy = \tfrac{3}{8} z^{-\frac{5}{8}} dz$$
$$y^{\frac{4}{3}} = z^{\frac{1}{2}}$$
$$y^3 = z^{\frac{9}{8}},$$

& après les ſubſtitutions on a la transformée $dx\sqrt{x} + dx\sqrt{z} + \frac{3dz\sqrt[4]{x^3}}{8\sqrt[4]{z}} = \frac{3dz\sqrt{z}}{8}$; équation qu'on voit tout de ſuite être homogene.

LXXXVIII.

Soit encore l'équation $ayyxxdx + bdx + cyxdx + fx^4yydy = 0$; cherchons ſi elle peut devenir homogene en lui appliquant tout de ſuite la méthode qui nous a fait découvrir les cas d'homogénéité de la formule. Soit $y = z^t$, $dy = tz^{t-1}dz$, on trouve pour transformée $az^{2t}xxdx + bdx + cz^txdx + tfx^4z^{2t+t-1}dz = 0$. Mais on doit avoir $2t + 2 = 1 + t$, ce qui donne $t = -1$; cette valeur de t étant miſe à ſa place dans la transformée, elle devient $\frac{axxdx}{zz} + bdx + \frac{cxdx}{z} - \frac{fx^4dz}{z^4} = 0$, qui eſt homogene. Donc la ſubſtitution qu'il faut faire ici eſt $y = \frac{1}{z}$.

LXXXIX.

Telles ſont les méthodes les plus générales pour rendre homogenes les équations qui ne le ſont pas ; il y a encore un cas qui, quoique particulier, ne laiſſe pas d'être aſſez étendu, & qu'on peut ramener à l'homogénéité ; c'eſt celui dans lequel les indéterminées & leurs différences ne paſſent pas la premiere dimenſion. Nous allons l'examiner dans le Problême ſuivant.

X C.

Cas particulier assez étendu qui se ramene à l'homogénéité.

PROBLEME. Rendre homogene l'équation $axdx + bydx + cdx + gxdy + fydy + hdy = 0$.

Ce cas est représenté par l'équation $(ax+by+c).dx+(gx+fy+h)dy$.

SOLUTION. Soit cette équation mise sous la forme suivante $(ax+by+c)\,dx+(gx+fy+h)\,dy=0$, je remarque d'abord que si b étoit $=g$, b & g étant de même signe, l'équation s'intégreroit tout de suite, puisqu'alors elle deviendroit $\pm b.(ydx+xdy) = -axdx - fydy - cdx - hdy$, dont l'intégrale est $\pm bxy + \frac{axx}{2} + \frac{fyy}{2} + cx + hy + C = 0$: mais nous supposons que b n'est pas égal à g. Cela posé, je fais $x = mz + nu + r$ & . . . . . $y = pz + ku + s$ substituant, il me vient

$$\left\{\begin{matrix} amz + anu + ar \\ + bpz + bku + bs \\ + c \end{matrix}\right\}.(mdz+ndu) \mp \left\{\begin{matrix} gmz + gnu + gr \\ + fpz + fku + fs \\ + k \end{matrix}\right\}.(pdz+kdu) = 0$$

équation qui me fait voir que j'aurois pu faire une substitution plus simple. Effectivement, je suppose $x = z + r$, $y = u + s$ (z & u sont deux nouvelles indéterminées, s & r sont deux constantes), j'ai . . . . . $dx = dz$ & . . . . . $dy = du$ substituant ces valeurs dans l'équation, elle se change en

$$\left\{\begin{matrix} az+ar \\ +bu+bs \\ +c \end{matrix}\right\} dz + \left\{\begin{matrix} gz+gr \\ +fu+fs \\ +h \end{matrix}\right\} du = 0.$$

Or je remarque que cette équation ſeroit homogene, ſi les termes $ar+bs+c$ & $gr+fs+h$ étoient égaux à zéro; cette ſuppoſition réduiſant la transformée à l'équation ſuivante $(az+bu)\,dz+(gz+fu).du=0$. Il ne s'agit plus que de tirer les valeurs de r & de s relatives à cette ſuppoſition. Or ces valeurs ſont $s=\frac{ah-cg}{gb-af}$

& . . . . . $r=\frac{cf-bh}{gb-af}$.

Donc les ſubſtitutions qu'il faut faire dans le cas préſent ſont. . . . . $x=z+\frac{cf-bh}{gb-af}$

&. . . . . $y=u+\frac{ah-cg}{gb-af}$.

C. Q. F. T.

XCI.

REMARQUE 1. S'il ſe trouvoit que cf fût $=bh$, ou $ah=cg$, l'une ou l'autre des deux conſtantes r ou s s'évanouiroit, ce qui marqueroit que dans ce cas on n'a beſoin que d'une ſubſtitution pour x, ſi $s=0$; pour y, ſi $r=0$. Soit, par exemple, $cf=bh$ laiſſant x & ſa différence, je me contenterai de ſuppoſer $y=x+s$, & je ferai le reſte de l'opération comme dans l'article précédent. Obſervations importantes ſur l'équation précédente.

XCII.

REMARQUE 2. Si l'on avoit en même temps $cf=bh$ & $ah=cg$, alors les deux conſtantes r & s s'évanouiroient

auquel cas la méthode pour parvenir à l'homogénéité ſeroit différente. Voici comment il faudroit s'y prendre dans ce cas. Puiſque $cf = bh$, & $ah = cg$, on a $g = \frac{ah}{c}$ & $f = \frac{bh}{c}$: donc l'équation propoſée $(ax + by + c)\,dx + (gx + fy + h)\,dy = o$, devient $(ax + by + c)\,dx + \left(\frac{ahx}{c} + \frac{bhy}{c} + h\right)dy = o$, ou bien $(ax + by + c)\,dx + (ax + by + c).\frac{h\,dy}{c} = o$, ou enfin $(ax + by + c) \times \left(dx + \frac{h\,dy}{c}\right) = o$; ce qui donne $ax + by + c = o$ ou . . . . . $x + \frac{hy}{c} + A = o$ (A eſt une conſtante) : or ces deux équations, ou ſéparément, ou priſes enſemble, ſatisfont au Problême, puiſque ce ſont deux lieux géométriques, qui ſe conſtruiſent par le moyen de deux lignes droites.

XCIII.

REMARQUE 3. Si l'on avoit $bg = af$, alors le dénominateur des équations . . . $x = z + \frac{cf - bh}{bg - af}$ & . . . . . $y = z + \frac{ah - cg}{bg - af}$ deviendroit égal à zéro ; donc ces termes ſeroient infinis, & par conſéquent la méthode ne feroit rien connoître. Mais alors ce cas ſeroit plus ſimple. Pour le prouver je remarque que la ſuppoſition préſente de $bg = af$ donne $f = \frac{bg}{a}$. Mettant donc pour f cette valeur dans la propoſée, elle devient $(ax + by + c)\,dx + (gx + \frac{gby}{a} + h)\,dy = o$. Je lui donne cette autre forme $(ax + by)\,dx + (ax + by)\,\frac{g\,dy}{a} + c\,dx + h\,dy = o$, & je ſuppoſe enſuite $ax + by = z$: je veux faire diſparoître y & dy, j'ai

j'ai donc $y = \frac{z - ax}{b}$: $dy = \frac{dz - adx}{b}$; ſubſtituant ces valeurs dans l'équation précédente, il me vient $z \cdot \left\{ dx + \frac{g\,dz}{ab} - \frac{g\,dx}{b} \right\} + c\,dx + \frac{h\,dz}{b} - \frac{ah\,dx}{b} = 0$, ou bien $dx \left\{ z - \frac{gz}{b} + c - \frac{ah}{b} \right\} + dz \times \left\{ \frac{gz}{ab} + \frac{h}{b} \right\} = 0$: ou enfin $dx = \frac{dz \cdot \left\{ \frac{h}{b} + \frac{gz}{ab} \right\}}{\frac{gz}{b} - z + \frac{ah}{b} - c}$, équation dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées ; ce qui prouve, comme nous l'avons dit, que ce cas eſt plus ſimple.

XCIV.

SCHOLIE. Nous venons de détailler dans les Chapitres précédents la méthode de conſtruire les équations différentielles dont les indéterminées ſont ſéparées ; enſuite celle de ſéparer les indéterminées dans les équations lorſqu'elles ſont homogenes ; & enfin celle de rendre homogenes beaucoup d'équations qui ne le ſont pas. Paſſons à un cas très-général dans lequel les indéterminées ſe ſéparent tout de ſuite par une méthode fort ingénieuſe. Ce cas eſt celui de l'équation $AXy^n\,dy + By^{n+1}X'\,dx + y^q X''\,dx = 0$, n & q étant des nombres quelconques, X, X', X'', des fonctions quelconques de x, & A, B, C, des conſtantes à volonté, & il peut ſervir de formule pour ces ſortes d'équations, qui ne doivent par conſéquent pas avoir plus de trois termes.

CHAPITRE VII.

Sur la conſtruction de l'équation $AXy^n dy + By^{n+1} X' dx + Cy^q X' dx = 0$.

XCV.

Procédé de la Méthode. PROBLEME. SÉparer les indéterminées dans la formule * $AXy^n dy + BX'y^{n+1} dx + Cy^q X' dx = 0$.

SOLUTION. 1°. Je commence par diviſer l'équation par y^q, elle devient $AXy^{n-q} dy + BX'y^{n+1-q} dx + CX' dx = 0$. Cette premiere opération me donne un terme $CX' dx$ qui ne contient que dx & des fonctions de x.

2°. Je diviſe par AX, & j'ai $y^{n-q} dy + \frac{BX'y^{n+1-q} dx}{AX} + \frac{CX'' dx}{AX} = 0$. Ce ſecond procédé nous donne, comme on le voit, un terme tout en y, un tout en x, & un autre qui eſt mêlé.

3°. J'obſerve maintenant que ſi je pouvois multiplier les deux premiers termes de l'équation ainſi réduite par une fonction de x, telle que ces deux premiers termes fuſſent une différentielle exacte, j'aurois l'intégrale cherchée, le troiſieme terme s'intégrant de lui-même. Soit donc ſup-

* *Nota.* Voyez dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Ann. 1731. page 103. un Mémoire de M. de Maupertuis, où ſe trouve la conſtruction de l'équation $dx = ax^m y^n dy + by^{n+1} x^p dx$, par une méthode qui differe un peu de celle que nous donnons ici.

posé ξ la fonction de x qui rend ces deux termes une différentielle complete, & qui par conséquent n'empêchera pas le troisieme d'être intégrable, je multiplie l'équation par ξ; & j'ai, laissant à part le troisieme terme & n'opérant que sur les deux premiers, $\xi y^{n-q}dy + \frac{B\xi y^{n-q+1}X'dx}{AX}$ qui est une différentielle complete. J'ai donc (Théor. fondamental) $d\frac{(\xi y^{n-q})}{dx} = d\frac{(BX'\xi y^{n-q+1})}{AXdy}$: c'est-à-dire, $\frac{y^{n-q}d\xi}{dx} = \frac{(n-q+1)B\xi X'y^{n-q}}{AX}$; ou bien $\frac{d\xi}{\xi} = \frac{(n-q+1)BX'dx}{AX}$. Donc $l\xi = \int\frac{(n-q+1)BX'dx}{AX}$. Donc enfin en passant des logarithmes aux nombres, & prenant e pour le nombre dont le logarithme $= 1$, on a $\xi = e^{\int\frac{(n-q+1)BX'dx}{AX}}$. Voilà donc la valeur de ξ trouvée.

4°. Mettant cette valeur de ξ dans l'équation intégrée $\frac{\xi y^{n-q+1}}{n-q+1} + \int\frac{C\xi X''dx}{AX} \pm Q = 0$, il nous vient $\frac{y^{n-q+1}}{n-q+1} \times e^{\int\frac{(n-q+1)BX'dx}{AX}} + \int\frac{CX''dx}{AX} \times e^{\int\frac{(n-q+1)BX'dx}{AX}} = \mp Q$; d'où l'on tire $y^{n-q+1} = (n-q+1) \times \left(\mp Q - \int\frac{CX''dx}{AX} \cdot e^{\int(n-q+1)\frac{BX'dx}{AX}}\right) \times e^{\int -n+q-1 \cdot \frac{BX'dx}{AX}}$: ou enfin $y = \left\{\overline{n-q+1} \cdot \times \left(\mp Q - \int\frac{CX''dx}{AX} \times e^{\int\overline{n-q+1} \cdot \frac{BX'dx}{AX}}\right) \times e^{\int\overline{-n+q-1} \cdot \frac{BX'dx}{AX}}\right\}^{\frac{1}{n-q+1}}$. De là il suit que quel que soit le rapport de A, B, C, n, q, dans l'équation, les indéterminées seront toujours séparées par cette méthode.

XCVI.

Observations sur la Méthode précédente.

REMARQUE 1. Si l'on avoit $n-q+1=0$, alors il y auroit des termes infinis; la méthode, par conſéquent, paroîtroit ne rien donner. Mais il faut remarquer qu'alors $n-q=-1$, & qu'ainſi la propoſée devient $\frac{A\,dy}{y}+\frac{BX'\,dx}{X}+\frac{CX''\,dx}{X}=0$, équation qui s'integre tout de ſuite, ſans qu'il ſoit beſoin d'avoir recours à notre méthode.

XCVII.

REMARQUE 2. Si l'on avoit $X'=x^n$, & $X=x^{n+1}$, alors la valeur logarithmique de ξ, $e^{\int \overline{n-q+1}\cdot\frac{BX'\,dx}{AX}}$ ſeroit $e^{\int \overline{n-q+1}\cdot\frac{B\,dx}{Ax}}$, & en faiſant $\overline{n-q+1}\cdot\frac{B}{A}=K$, elle deviendroit $e^{\int\frac{K\,dx}{x}}=e^{Kl.x}$: à cauſe que e eſt ſuppoſé un nombre dont le logarithme $=1$, $e^{Klx}=x^K$; car ſoit $e^{Klx}=z$; on aura $le^{Klx}=lz$; ou bien $Klxle=lz$; or $le=1$, donc $Klx=lz$; donc enfin (Art. XXIX. Introd. Ire. Part.) & $x^K=z$; or $z=e^{Klx}$; donc $e^{Klx}=x^K$. Donc en mettant pour ξ ſa valeur x^K dans l'équation $\xi y^{n-q}dy+\frac{y^{n-q+1}}{n-q+1}\times\overline{n-q+1}\cdot\frac{B\xi X'\,dx}{AX}+\frac{CX''\xi\,dx}{AX}=0$, on trouve $y^{n-q}\,dy\,x^K+Kx^{K-1}\,dx\times\frac{y^{n-q+1}}{n-q+1}+\frac{CX''x^{K-n-1}\,dx}{A}=0$; ce qui nous montre que dans ce cas l'équation eſt intégrable beaucoup plus ſimplement.

XCVIII.

COROLLAIRE 1. La formule que nous venons de traiter d'une maniere générale eſt des plus étendues : elle renferme une infinité de cas. Mlle Agneſi a traité la même formule dans ſes Inſtitutions Analytiques ; mais cette illuſtre Géometre employe pour la réſoudre une méthode différente de la nôtre. Celle dont elle ſe ſert, & qui eſt de M. Bernoulli, conſiſte à ſuppoſer y égale à deux nouvelles indéterminées ; & en faiſant les ſubſtitutions ordinaires, on parvient à la ſéparation des indéterminées par le moyen des quantités logarithmiques & exponentielles. Notre formule comprend auſſi toutes celles dont M. Craig a donné la ſéparation dans ſon Livre *de Calculo Fluentium*. C'eſt ce que nous développerons bien-tôt dans le Chapitre ſuivant, où nous donnerons les différentielles plus générales qui s'integrent par notre méthode.

Quelle eſt la généralité de la formule précédente.

Tom. 2. page 904, juſqu'à 914.

Tome 1. page 175.

Lib. de Calculo Fluent. p. 40. & ſeq.

XCIX.

COROLLAIRE. 2. Nous ſuppoſons dans notre formule A, B, C des coefficiens quelconques, dont les ſignes ſont poſitifs ou négatifs. Ainſi ſi on avoit $dx - ax^m y^n dy - by^{n+1} x^p dx = 0$, qui eſt l'équation que M. de Maupertuis traite dans le Mémoire que nous avons cité, ce cas n'auroit point de difficulté. Car comparant cette équation différentielle avec notre formule, on trouve

$$A = -a$$
$$B = -b$$
$$q = 0$$
$$X = x^m$$
$$X' = x^p$$

Donc ſubſtituant ces valeurs dans $\zeta = e^{\int \overline{n-q+1} \cdot \frac{BX'dx}{AX}}$, on a $\zeta = e^{\int \overline{n+1} \cdot \frac{-bx^p dx}{-ax^m}} = e^{\int \overline{n+1} \cdot \frac{bx^{p-m}dx}{a}}$, ou enfin $\zeta = e^{\frac{\overline{n+1} \cdot b}{(p-m+1)a} x^{p-m+1}}$. Si l'on avoit $dx - ay^n x^m dy + by^{n+1} x^p dx = 0$, où le ſecond terme eſt ſeul négatif, le cas ne ſeroit pas plus embarraſſant: on auroit alors $\zeta = e^{\frac{(n+1) \cdot b}{(p-m+1) \cdot -a} x^{p-m+1}}$; & ainſi des autres.

CHAPITRE VIII.

Des différentielles qui peuvent ſe ramener par des transformations à la formule du Chapitre précédent.

C.

LOrſque nous avons cherché les cas d'intégration des équations différentielles, en déterminant ceux où ces équations peuvent être rendues homogenes, les conditions d'intégrabilité ne tomboient que ſur les expoſants. On en peut auſſi trouver qui tombent ſur les coefficiens

en examinant les cas où la réduite ſera de la forme ſuivante, $AXy^n dy + BX'y^{n+1} dx + Cy^q X' dx = 0$ que maintenant nous ſavons intégrer. Nous allons faire cette recherche, en ſuppoſant même que dans ces équations il ſe trouve des fonctions de x & de y. Nous marcherons des équations les plus ſimples aux plus compoſées, afin d'accoutumer les commençans à généraliſer les méthodes.

C I.

PROBLEME 1. Séparer les indéterminées dans l'équation $(x^n dx + ay^n dy) . p = \left\{\frac{x dy - y dx}{xx}\right\} . q$, dans laquelle p & q ſont des fonctions algébriques de x & de y, telle que la ſomme de leurs expoſants eſt la même dans chaque terme de p, & eſt auſſi la même dans chaque terme de q, quoique toutefois elle puiſſe être différente dans p & dans q.

Premiere formule de ces différentielles.

SOLUTION. Je mets d'abord l'équation ſous la forme ſuivante $x^n dx + ay^n dy - (x dy - y dx) \times \frac{q}{pxx} = 0$. Je fais $x = yz$, ce qui me donne $x^n = y^n z^n$

$$dx = y dz + z dy.$$

Donc en faiſant ces ſubſtitutions j'ai $y^{n+1} z^n dz + z^{n+1} y^n dy + ay^n dy - (zy dy - y^2 dz - zy dy) \times \frac{q}{pxx} = 0$. Or q ſera (hyp.) $= y^m \varphi z$; & $pxx = y^s Tz$: donc $\frac{q}{pxx} = y^k \Delta z$; donc la propoſée eſt $y^{n+1} z^n dz + z^{n+1} y^n dy + ay^n dy + y^{k+2} \Delta z . dz = 0$, ou $(z^{n+1} + a) \times y^n dy + y^{n+1} z^n dz + y^{k+2} \Delta z . dz = 0$,

c'eſt-à-dire, $Zy^n dy + y^{n+1} z^n dz + y \Delta z . dz = 0$, équation qui, comme on le voit, eſt dans le cas de notre formule générale.

CII.

Application à quelques exemples particuliers.

Suppoſons que dans la formule $n = 2$

$$p = fxy^2 + gyx^2$$

$$q = mx^2y^2 + nyx^3,$$

Premier exemple.

l'équation dont il faut ſéparer les indéterminées eſt $(x^2 dx + ay^2 dy) \times (fxy^2 + gyx^2) = \left\{\frac{x dy - y dx}{xx}\right\} \times (mx^2y^2 + nyx^3)$; ou $x^2 dx + ay^2 dy - (x dy - y dx) \times \frac{mx^2y^2 + nyx^3}{fx^3y^2 + gyx^4} = 0$. Soit $x = yz$. La transformée ſera $y^3z^2 dz + z^3y^2 dy + ay^2 dy - (zy dy - y^2 dz - zy dy) \times \frac{my^4z^2 + ny^4z^3}{fy^5z^3 + gy^5z^4} = 0$; & en réduiſant $(z^3 + a) . y^2 dy + y^3z^2 dz + \left\{\frac{m + nz}{fz + gzz}\right\} y dz = 0$, qui s'integre par le Chapitre précédent, en mettant l'indéterminée z au lieu de x.

CIII.

Seconde formule.

PROBLEME 2. Séparer les indéterminées dans la formule $(x^n dx \pm ay^{\frac{-n-1-c}{c}} dy) \times p = (x dy + cy dx) \times q$: p & q ſont des fonctions algébriques de x & de y, telles que l'excès de l'expoſant de l'une de ces deux indéterminées multiplié par c ſur l'expoſant de l'autre indéterminée ſoit le même dans chaque terme de p ; & que cette même condition ſe trouve auſſi dans chaque terme de q, ſans qu'il ſoit pour cela néceſſaire que p & q ſoient des fonctions

fonctions homogenes de x & de y.

Solution. Je mets l'équation ſous la forme ſuivante. $x^n dx \pm a y^{\frac{-n-c-1}{c}} dy\,(-x dy - c y dx)\,.\,\frac{q}{p} = 0$. Je remarque maintenant que par les conditions du Problême, chaque terme de p étant, par exemple $y^s x^r$, on doit avoir $s \times c - r = M$ (une conſtante) ; donc $r = s \times c - M$, donc $y^s x^r$ devient $y^s x^{s \times c - M} = \frac{y^s x^{s \times c}}{x^M}$. De même chaque terme de q ſera de la forme ſuivante $\frac{y^k x^{k \times c}}{x^N}$.

Ce calcul me montre que la transformation que je dois faire eſt $y x^c = z$; donc $x^c dy + c y x^{c-1} dx = dz$

ou . . . . . $(x dy + c y dx) x^{c-1} = dz$

on a auſſi . . . . . $y = \frac{z}{x^c}$

$$y^{\frac{-n-1-c}{c}} = x^{n+1+c} z^{\frac{-n-1-c}{c}}.$$

$$dy = \frac{x^c dz - c z x^{c-1} dx}{x^{2c}}.$$

Donc en ſubſtituant dans la propoſée pour y & dy leurs valeurs, on aura la transformée

$$x^n dx \pm \frac{a x^{n+1+2c} z^{\frac{-n-1-c}{c}} dz \mp a c z^{\frac{-n-1}{c}} x^{n+2c} dx}{c^{2c}}$$

$(-x^{-c+1} dz)\,\frac{q}{p} = 0$: or il eſt évident par ce que nous venons de dire que $\frac{q}{p} = x^t \varphi z$; donc on aura

$x^{n+2c} dx \pm a x^{n+2c+1} z^{\frac{-n-1-c}{c}} dz \mp a c z^{\frac{-n-1}{c}} x^{n+2c} dx - x^{t+c+1} dz \varphi z = 0$ ou $\left(1 \mp a c z^{\frac{-n-1}{c}}\right) x^{n+2c} dx$

$\pm a x^{n+2c+1} z^{\frac{-n-c-1}{c}} dz - x^{c+c+1} dz \, qz = 0$; équation réduite au cas général du Chapitre précédent, & dont par conséquent nous savons séparer les indéterminées.

CIV.

Application à un exemple.

Soit dans la formule . . $n = -10$

$c = 3$

$p = by^2 x^4 + fy^9 x^{25}$

$q = gy^{\frac{1}{2}} x^3 - hy^{10} x^{\frac{63}{2}}$

La proposée sera $x^{-10} dx + ay^2 dy - (x dy + 3y dx) \times \frac{gy^{\frac{1}{2}} x^3 - hy^{10} x^{\frac{63}{2}}}{by^2 x^4 + fy^9 x^{25}} = 0$. La transformation qu'il faudra faire est donc $yx^3 = z$; après les différentes substitutions, on aura la transformée suivante $x^{-10} dx + \frac{ax^{-3} z^2 dz - 3az^3 x^{-4} dx}{x^6} - x^{-2} dz \times \left\{ \frac{gz^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - hz^{10} x^{\frac{3}{2}}}{bz^2 x^{-2} + fz^9 x^{-2}} \right\} = 0$. Donc $x^{-4} dx + ax^{-3} z^2 dz - 3az^3 x^{-4} dx - x^4 dz \times x^{\frac{7}{2}} \times \left\{ \frac{g - hz^{\frac{19}{2}}}{bz^{\frac{3}{2}} + fz^{\frac{17}{2}}} \right\} = 0$. Donc enfin $(1 - 3az^3) x^{-4} dx + ax^{-3} z^2 dz - x^{4+\frac{7}{2}} dz \times \left\{ \frac{g - hz^{\frac{19}{2}}}{bz^{\frac{3}{2}} + fz^{\frac{17}{2}}} \right\} = 0$, équation réduite à notre cas général.

CV.

Troisieme formule qui comprend les deux précédentes.

PROBLEME 3. Séparer les indéterminées dans la formule $(x^n dx \pm ay^{\frac{-fn-c-f}{e}} dy) p = (fx dy + cy dx) q$?

Les formules des deux Problêmes précédents ne sont que

des cas particuliers de celle-ci ; celle du Problême 2, lorſque $f = 1$, & celle du Problême premier, quand $f = 1$ & $c = -1$; p & q ſont des fonctions de x & y telles que celles du Problême précédent, excepté qu'au lieu de multiplier par c l'expoſant de l'une des deux indéterminées dans que terme de p & de q, il le faut multiplier par $\frac{c}{f}$. Il faut de plus que p & q ſoient telles qu'après y avoir ſubſtitué pour y ſa valeur en x & en z, ou pour x ſa valeur en y & en z, on trouve des quantités compoſées de deux facteurs, dont l'un contienne x ſans z, & l'autre z ſans x dans le premier cas ; ou dont l'un contienne y ſans z, & l'autre z ſans y dans le ſecond.

Solution. La propoſée eſt $x^n dx \pm a y^{\frac{-fn-c-f}{c}} dy \mp (f x dy + c y dx) \frac{q}{p} = 0$. Pour trouver la transformation qui réuſſira, je raiſonne comme dans le Problême précédent, & je vois qu'il faut ſuppoſer $y x^{\frac{c}{f}} = z$: cette ſuppoſition me donne $x^{\frac{c}{f}} dy + \frac{c}{f} y x^{\frac{c}{f}-1} dx = dz$ ou . . . . . $f x dy + c y dx = \frac{f dz}{x^{\frac{c}{f}-1}}$.

Je ſubſtitue pour y & dy leurs valeurs $y = \frac{z}{x^{\frac{c}{f}}}$,

$$dy = \frac{x^{\frac{c}{f}} dz - \frac{c}{f} z x^{\frac{c}{f}-1} dx}{x^{\frac{2c}{f}}} ;$$

j'ai donc la transformée ſuivante $\left(1 \mp \frac{acz}{f}^{\frac{-fn-f}{c}}\right) x^{\frac{fn+2c}{f}} dx \pm a x^{\frac{fn+2c}{f}+1} z^{\frac{-fn-c-f}{c}} dz - f x^{n+\frac{c}{f}+1}$

$dz\varphi z = 0$, équation réduite à notre cas général.

CVI.

Application de cette formule à un exemple.

Suppoſons que dans la formule précédente $f = -3$
$n = 2$
$c = 1$
$p = y$
$q = ax$:

L'équation à intégrer ſera $(x^2 dx + ay^2 dy)\, y = (-3x dy + y dx)\, ax$, ou bien $x^2 dx + ay^2 dy - (-3x dy + y dx)\frac{ax}{y} = 0$. Donc la ſuppoſition qu'il faut faire ici eſt $yx^{-\frac{1}{3}} = z$. Faiſant les ſubſtitutions convenables pour y & dy, nous aurons la transformée ſuivante $x^2 dx + ax^3 z^8 dz + \frac{ax^3}{3} z^9 x^2 dx + \frac{3ax^3 dz}{z} = 0$; ou bien $(1 + \frac{a}{3} z^9)\, x^2 dx + ax^3 z^8 dz + \frac{3ax^3 dz}{z} = 0$, équation réduite au cas général.

CVII.

Quatrieme formule.

PROBLEME 4. Séparer les indéterminées dans la formule $ax^n dx + by^n dy + (x dy - y dx) \times \left\{\frac{p}{q} + \frac{\pi}{\omega}\right\} = 0$.

Celle-ci eſt encore plus générale que les précédentes, p & q étant des fonctions homogenes de x & de y, mais de différentes dimenſions, ſi l'on veut, dont la différence ſoit k; & π, ω étant auſſi des fonctions de x & de y homogenes chacunes telles que l'excès du nombre des dimenſions de π ſur celles de ω ſoit $n - 1$.

SOLUTION. Soit $x = yz$, on aura $ay^{n+1}z^n dz + ay^n z^{n+1} dy + by^n dy + (zydy - yydz - zydy) \times (y^k \Delta z + y^{n-1} \varphi z) = 0$, c'eſt-à-dire,

$$\left.\begin{array}{l} az^{n+1} y^n dy \\ + by^n dy \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} + ay^{n+1} z^n dz. \\ - y^{n+1} dz \varphi z - y^{k+2} dz \Delta z = 0, \end{array}\right.$$

équation qui eſt, comme l'on voit, dans notre cas général, & de laquelle par conſéquent on ſéparera les indéterminées ſans aucune difficulté.

CVIII.

Application à un exemple.

Suppoſons que dans la formule . . . . $n = 7$

$$\frac{p}{q} = \frac{x^3y + y^3x}{yx}$$

$$\frac{\pi}{\omega} = \frac{x^8y + y^8x}{x^3 + y^3};$$

l'équation à intégrer ſera $ax^7dx + by^7dy + (xdy - ydx) \times \left\{ \frac{x^3y + y^3x}{xy} + \frac{x^8y + y^8x}{x^3 + y^3} \right\} = 0$. Soit dans cette équation $x = yz$, & ſubſtituons pour x & dx leurs valeurs, nous aurons la transformée ſuivante $ay^8z^7dz + az^8y^7dy + by^7dy + (zydy - y^2dz - zydy) \times \left\{ y^2 \times (z^2 + 1) + y^6 \times \left(\frac{z^8 + z}{z^3 + 1} \right) \right\} = 0$; qui devient après la réduction $az^8y^7dy + ay^8z^7dz - y^4.(z^2 + 1)dz + by^7dy - y^8.\left\{ \frac{z^8 + z}{z^3 + 1} \right\} dz = 0$, équation telle que nous la demandons.

CIX.

Formule précédente généraliſée.

PROBLEME 5. Trouver les cas dans leſquels on parvient à ſéparer les indéterminées dans la formule $hx^q dx + by^n dy + (xdy + gydx) \times \left\{ \frac{p}{q} + \frac{\pi}{\omega} \right\} = 0$.

Je ne mets point de coefficient à $x\,dy$, parce qu'il eſt toujours aiſé de débarraſſer de ſon coefficient un des deux termes; p, q, π, ω, étant des fonctions de x & de y, telles que a étant l'expoſant de x dans un terme quelconque de p, & r l'expoſant de y; a' l'expoſant de x dans q, & r' celui de y; α l'expoſant de x dans π, & ρ celui de y; α' l'expoſant de x dans ω, & ρ' celui de y; on ait dans chaque terme de p, $-\frac{a}{g}+r=A$, dans chaque terme de q, $-\frac{a'}{g}+r'=A'$, & de même dans chaque terme de π & de ω, $-\frac{\alpha}{g}+\rho=B$ & $-\frac{\alpha'}{g}+\rho'=B'$; A, A', B, B' ſont des conſtantes différentes. Il faut de plus que dans π & ω $-\frac{\alpha'}{g}+\rho+\frac{a'}{g}-\rho'=n+\frac{1}{g}$.

SOLUTION. Pour trouver quelle eſt la transformation qui réuſſira le mieux, j'obſerve qu'en faiſant $x=zy^{-\frac{1}{g}}$, j'aurai $x\,dy+gy\,dx=gy^{-\frac{1}{g}+1}\,dz$; ce qui me détermine à faire cette ſuppoſition. La transformée qu'elle me donne eſt $hy^{-\frac{q}{g}-\frac{1}{g}}z^q\,dz-\frac{h}{g}z^{q+1}y^{-\frac{q}{g}-\frac{1}{g}-1}\,dy+by^n\,dy+gy^{-\frac{1}{g}+1}\,dz\times(y^k\Delta z+y^f\varphi z)=0$. Or il eſt évident que cette équation ſe ramenera au cas général que nous traitons toutes les fois qu'on aura

$$n=-\frac{q}{g}-\frac{1}{g}-1$$

$$\&\ k \text{ ou } f=-\frac{q}{g}-1=n+\frac{1}{g},$$

car alors l'équation précédente devient $\left(b-\frac{h}{g}z^{q+1}\right)y^{-\frac{q}{g}-\frac{1}{g}-1}\,dy+(hz^q+g\varphi z)y^{-\frac{q}{g}-\frac{1}{g}}\,dz+gy^{k-\frac{1}{g}+1}\,dz\Delta z=0$; qui eſt telle qu'on la demande.

CX.

Application de la formule à un exemple.

Soit l'équation à intégrer $x^{-21}dx + by^3dy + (xdy + 5ydx) \times \left\{ \frac{xy^{-\frac{1}{5}} + x^2y^3}{x^2y - x^3y^{1+\frac{1}{5}}} + \frac{ax^2y^{\frac{4}{5}+6} + by^{\frac{2}{3}+6}}{x^2y^{\frac{4}{5}+3} + x^3y^{\frac{19}{5}}} \right\} = 0$; je ferai . . . . . $x = zy^{-\frac{1}{5}}$

ce qui me donne . . . . $dx = y^{-\frac{1}{5}}dz - \frac{1}{5}zy^{-\frac{2}{3}-1}dy$

$$xdy + 5ydx = 5y^{-\frac{1}{5}+1}dz.$$

Donc en substituant pour x & pour dx leurs valeurs, on aura la transformée $y^4z^{-21}dz - \frac{1}{5}z^{-20}y^3dy + by^3dy + 5y^{-\frac{1}{5}+1}dz \times \left\{ y^2 \cdot \left(\frac{1+z}{z-z^2}\right) + y^{\frac{1}{5}+3} \cdot \left(\frac{az^2+b}{z^2+z^3}\right) \right\} = 0$, laquelle devient en réduisant $\left(b - \frac{1}{5}z^{-20}\right)y^3dy + \left\{ z^{-21} + \left(\frac{5az^2+5b}{z^2+z^3}\right) \right\} y^4dz + 5y^{2+\frac{1}{5}}dz \times \left(\frac{1+z}{z-z^2}\right) = 0$, équation qui a les conditions cherchées.

CXI.

COROLLAIRE. Si dans la formule du Problême précédent on avoit $A - A' = B - B'$, alors la formule se réduiroit à un cas plus simple. Car en multipliant p par ω & π par q, & ω & q l'un par l'autre, on verroit que les deux fonctions $\frac{p}{q}$ & $\frac{\pi}{\omega}$ se réduiroient à une seule $\frac{K}{L}$, telle qu'en supposant m l'exposant de x, & μ l'exposant de y dans K, m' l'exposant de x & μ' l'exposant de y dans L, on aura encore dans chacun des termes de K $-\frac{m}{g} + \mu = C$ & dans chaque terme de L, $-\frac{m'}{g} + \mu' = C'$, C & C' étant des constantes différentes. Ce

ſeroit la même choſe ſi l'on avoit $\frac{p}{q} + \frac{\pi}{\omega} + \frac{p'}{q'} + \frac{\pi'}{\omega'}$ + &c. un nombre quelconque de fonctions avec la condition requiſe par le Corollaire ; elles ſe réduiroient toutes à une ſeule.

CXII.

PROBLEME 6. Trouver les cas d'intégrabilité de l'équation $dx + \frac{fx\,dy}{y} = \frac{y^k x^r\,dy\,\Delta\frac{x}{y^n} + y^t x^s\,dx\,Z\frac{x}{y^n}}{y^m x^p\,\varphi\frac{x}{y^n} + y^q x^h\,\Gamma\frac{x}{y^n}}$

dans laquelle on ſuppoſe $n = -f$.

SOLUTION. Soit . . . . . $\frac{x}{y^n} = u$

on aura . . . . . $y^{-n}\,dx - nxy^{-n-1}\,dy = du$

(& comme $-f = n$ hyp.) $y^f\,dx + fxy^{f-1}\,dy = du$

où . . . . . $dx + \frac{fx\,dy}{y} = y^{-f}\,du$.

En faiſant pour x & dx les ſubſtitutions convenables, on aura la transformée ſuivante $y^{-f}\,du = \frac{y^{k-fr}\,dy\,\Delta u \times u^r + y^{t-fs-f}\,du\,Zu \times u^s - fu^{s+1}\,Zu\,.\,y^{t-fs-f-1}\,dy}{y^{m-fp}\,u^p\,\varphi u + y^{q-fh}\,u^h\,\Gamma u}$

ou bien $y^{m-fp-f}u^p\,\varphi u\,.\,du + y^{q-fh-f}u^h\,\Gamma u\,.\,du - u^r\,\Delta u\,.\,y^{k-fr}\,dy - y^{t-fs-f}u^s\,Zu\,.\,du + fu^{s+1}\,Zu\,.\,y^{t-fs-f-1}\,dy = 0$, équation qui ſe ramene à la formule $Vy^\lambda\,dy + V'y^{\lambda+1}\,du + V''y^\mu\,du = 0$ (V, V', V'' étant des fonctions de u) toutes les fois qu'on a $k - fr = t - fs - f - 1$ & . . . . . $q - fh$ ou $= t - fs$ $m - fp$

c'eſt-à-dire,

c'eſt-à-dire, toutes les fois qu'on aura $k = t - f - 1$

$$s = r$$

& . . . . . $q = t$ ou $m = t$

$h = s$ $\quad p = s$

CXIII.

Corollaire. Donc on ſéparera les indéterminées dans l'équation $dx - \frac{x\,dy}{y} = \frac{dy\,\Delta\,\frac{x}{y}}{\varphi\,\frac{x}{y} + y^{p}\,\Gamma\,\frac{x}{y}}$ en faiſant $\frac{x}{y} = u$. Car on aura l'équation ſuivante $-\Delta u \,.\, dy + \varphi u \,.\, y\,du + y^{p+1}\,\Gamma u \,.\, du = 0$ qui a les conditions requiſes.

CXIV.

Application de la formule à un exemple.

Soit dans la formule . . . . . $k = 3$

$f = 1$

$q = t = 5$

$h' = r = s = 2$

$n = -1$

$m = -2$

$p = -3$

la propoſée ſera $dx + \frac{x\,dy}{y} = \frac{ay^{4}x^{3}\,dy + by^{7}x^{4}\,dx}{cy + gy^{6}x^{3}}$. Je ſuppoſe $xy = u$, ce qui me donne $dx + \frac{x\,dy}{y} = y^{-1}\,du$ & pour transformée l'équation $y^{-1}\,du = \frac{au^{3}y\,dy + by^{2}u^{4}\,du - bu^{5}y\,dy}{cy + gu^{3}y^{3}}$, ou bien $c\,du + gy^{2}u^{3}\,du - au^{3}y\,dy - by^{2}u^{4}\,du + bu^{5}y\,dy = 0$, d'où l'on tire $(+u^{5} - au^{3})\,y\,dy + (gu^{3} - bu^{4})\,y^{2}\,du + c\,du = 0$, qui eſt réduite à l'état demandé.

CXV.

REMARQUE. On voit par les applications que nous venons de faire de la méthode du Chapitre VII. combien cette méthode eſt générale. Nous rencontrerons encore dans la ſuite de cet Ouvrage pluſieurs équations différentielles qui s'integrent par ſon moyen. Les Problêmes que nous venons de traiter renferment les cas les plus généraux qui peuvent s'y rapporter.

CHAPITRE IX.

Examen général de tous les cas particuliers d'intégration des équations à trois termes.

CXVI.

Formule des équations à trois termes.

TOutes les équations différentielles à trois termes peuvent être compriſes ſous la forme ſuivante (*A*) $ax^m u^p dx + bu^k x^n dx = du$, ou en faiſant $x^{n+1} = z$, ſous cette autre (*B*) $az^m u^p dz + bu^k dz = du$. Si on diviſe l'équation (*B*) par u^p, & que l'on ſuppoſe $u^{-p+1} = y$, alors l'équation (*B*) aura cette forme (*C*) $ax^m dx + by^q dx = dy$.

Comparée avec celle du Chapitre VI.

1°. Comparant cette équation avec la formule des équations à trois termes que nous avons déja examinée (Chap. VI. Art. LXXXII.) & qui eſt $ay^n x^m dx + by^q x^p dx$

$+ cy^s x^r dy = 0$, on a . . . . . $n = 0$

$p = 0$

$s = 0$

$r = 0$.

La formule $(s - q + 1) \times (p - m) = (p - r + 1) \times (n - q)$, qui exprime la condition que doit avoir l'équation précédente pour devenir homogene, eſt donc ici $q = \frac{m}{m+1}$. Donc toutes les fois qu'on aura dans (C) $q = \frac{m}{m+1}$, en faiſant $x = u^{\frac{1}{m+1}}$, on aura $au^{\frac{m}{m+1}} du - (m+1) . u^{\frac{m}{m+1}} dy + cy^{\frac{m}{m+1}} du = 0$, équation homogene, & par conſéquent intégrable, ou au moins conſtructible.

2°. Si $q = 1$, la propoſée (C) devient $ax^m dx + cy dx = dy$, équation intégrable (Chap. VII.).

CXVII.

3°. Si dans l'équation $ax^m dx + cy^q x^n dx = dy$, on a $q = 2$, cette équation devient $ax^m dx + cyyx^n dx = dy$, qui eſt la fameuſe équation que tous les Géometres connoiſſent ſous le nom de l'équation de Ricati. Dans cette équation on n'a pu juſques ici ſéparer en général les indéterminées; mais il y a une infinité de valeurs de m dans leſquelles on parvient à cette ſéparation. Voici la méthode dont je me ſers pour déterminer tous ces différents cas.

CXVIII.

Méthode pour trouver les cas dans lesquels on integre l'équation de Ricati.

PROBLEME. Trouver les cas d'intégration de l'équation $ax^m dx + cy^2 x^n dx = dy$.

SOLUTION. Je fais $y = Ax^p + x^r t$. (Le coefficient A, & les exposants p & r sont des constantes arbitraires que nous déterminerons dans la suite de l'opération, t est une nouvelle indéterminée). J'aurai donc $dy = pAx^{p-1} dx + rx^{r-1} t dx + x^r dt$, & $yy = AAx^{2p} + 2Ax^{p+r} t + x^{2r} tt$: mettant pour y, yy, dy leurs valeurs dans l'équation proposée, elle devient $ax^m dx + cAAx^{2p+n} dx + 2cAtx^{p+r+n} dx + cttx^{2r+n} dx = pAx^{p-1} dx + rtx^{r-1} dx + x^r dt$.

Suppoſons à préſent . . . . . $cAA = pA$

$$2p + n = p - 1$$

$$r = 2cA$$

c'eſt-à-dire . . . . . $p = -n - 1$,

$$A = \frac{-n-1}{c}$$

$$r = -2n - 2.$$

Par le moyen de ces égalités, les 2, 3, 5, 6e termes de la transformée ſe détruiſent, & elle devient $ax^m dx + cttx^{-3n-4} dx = x^{-2n-2} dt$, c'eſt-à-dire, diviſant par x^{-2n-2}, $ax^{m+2n+2} dx + cttx^{-n-2} dx = dt$, ou (D) $ax^K dx + cttx^k dx = dt$, en ſuppoſant $m + 2n + 2 = K$ & . . . . . $-n - 2 = k$

Je reprends à préſent la propoſée $ax^m dx + cyyx^n dx = dy$, laquelle en faiſant $y = \frac{1}{z}$ devient $ax^m dx$

$+\frac{cx^n dx}{zz} = -\frac{dz}{zz}$, ou $ax^m zz\,dx + cx^n dx = -dz$, dans laquelle je suppose, comme plus haut, $z = Bx^q + x^\alpha u$ (B, q, α, sont de même des constantes indéterminées, u est une nouvelle variable) : on a donc $dz = qBx^{q-1}dx + \alpha u x^{\alpha-1}dx + x^\alpha du$, $zz = BBx^{2q} + 2Bx^{q+\alpha}u + uux^{2\alpha}$, & substituant ces valeurs, nous avons $aBBx^{2q+m}dx + 2aBx^{q+\alpha+m}udx + auux^{2\alpha+m}dx + cx^n dx = -qBx^{q-1}dx - \alpha x^{\alpha-1}udx - x^\alpha du$; supposons à présent $aBB = -Bq$, $2q+m = q-1$, $-\alpha = 2aB$, c'est-à-dire . . . . $q+m = -1$

$$B = \frac{m+1}{a}$$

$$\alpha = -2m-2$$

par ces suppositions les 1er, 2, 5 & 6e termes de la dernière équation se détruisent, & elle devient $auux^{-3m-4}dx + cx^n dx = -x^{-2m-2}du$, c'est-à-dire en divisant par x^{-2m-2}, $cx^{2m+n+2}dx + auux^{-m-2}dx = -du$, ou enfin ($G$) $cx^B dx + auux^\delta dx = -du$ en supposant

$$B = 2m+n+2$$

& . . . . . $\delta = -m-2$.

CXIX.

Il est évident que dans l'équation $ax^m dx + cyyx^n dx = dy$, on sépareroit tout de suite les indéterminées, si l'on avoit $m = n$; donc dans les formules (D) & (G), on parviendra à cette séparation toutes les fois qu'on aura

$$m+2n+2 = -n-2$$

& . . . . . $2m+n+2 = -m-2$

équations d'où l'on tire deux valeurs de m, ſavoir

$$m = -3n-4$$

& . . . . . $m = \frac{-n-4}{3}$,

leſquelles étant ſuppoſées, les indéterminées ſe ſéparent.

Puiſque dans la propoſée on ſépare les indéterminées, lorſque $m = \frac{-n-4}{3}$, on les ſéparera dans les formules (G), (D), lorſque $K = \frac{-k-4}{3}$, & $B = \frac{-\delta-4}{3}$, équations deſquelles on tire deux autres valeurs de m, ſavoir

$$m = \frac{-5n-8}{3}$$

$$m = \frac{-3n-8}{5}.$$

On trouvera, en continuant ainſi, une infinité d'autres valeurs de m, comme . . . . . $m = \frac{-7n-12}{5}$

$$m = \frac{-5n-12}{7}$$

$$m = \frac{-9n-16}{7}$$

$$m = \frac{-7n-16}{9} \text{ \&c.}$$

c'eſt-à-dire en général . . . . . $m = \frac{(2h+1)\times -n-4h}{2h+1}$, h repréſente un nombre quelconque entier, poſitif en commençant par l'unité.

CXX.

REMARQUE 1. Il faut ajouter qu'on ſéparera les indéterminées dans la formule précédente, toutes les fois qu'on la pourra rendre homogene par la ſeconde méthode du Chap. VI.

CXXI.

REMARQUE 2. Si dans l'équation $ax^m dx$ +

$byyx^n dx = dy$, on ſuppoſe $n = 0$, elle devient $ax^m dx + byy dx = dy$, & la formule trouvée dans le Problême pour la valeur de m, ſera $m = \frac{(2h \mp 1) \times -n - 4h}{2h \mp 1}$ devient $m = \frac{-4h}{2h \mp 1}$; dans ce cas voici la méthode qu'il faut ſuivre pour trouver l'équation algébrique qui répond à l'équation $-ax^{\frac{-4h}{2h \mp 1}} dx + byy dx = dy$. Prenons cette autre équation (A) $-ads + bttds = dt$, qui donne (α) $-ds = \frac{dt}{a - btt}$, différentielle dont l'intégrale eſt (par les méthodes des fractions rationelles) en ajoutant une conſtante C, $C - s = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \times (l\overline{\sqrt{a} + t\sqrt{b}} - l\overline{\sqrt{a} - t\sqrt{b}})$, & en prenant k pour le nombre dont le logarithme eſt l'unité, on a (B) $k^{\overline{C-s} \cdot 2\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a} + t\sqrt{b}}{\sqrt{a} - t\sqrt{b}}$. L'équation (B) eſt donc identique avec l'équation (α), je fais dans l'une & dans l'autre $s = -x^{-1}$

& . . . . . $t = \frac{1}{b} x + xxy$,

les équations qui réſulteront de ces ſubſtitutions ſeront encore identiques ; on a $ds = \frac{dx}{xx}$ $dt = \frac{dx + 2byxdx + bxxdy}{b}$ $tt = \frac{xx + 2bx^3y + bby^2x^4}{bb}$. Subſtituant ces valeurs dans l'équation (α), on a $\frac{-dx}{xx} = \frac{dx + 2byxdx + bxxdy}{ab - xx - 2bx^3y - b^2y^2x^4}$, ou $-abdx + xxdx + 2bx^3ydx + b^2y^2x^4dx = xxdx + 2bx^3ydx + bx^4dy$, ou en effaçant ce qui ſe détruit $-adx + by^2x^4dx = x^4dy$, & enfin en diviſant par x^4, $-ax^{-4}dx + byydx = dy$ premiere équation réduite.

Méthode pour trouver l'équation algébrique qui répond à l'équation propoſée dans la ſuppoſition de $n = 0$.

Maintenant l'équation exponentielle (B) devient après des réductions fort ſimples (D) $k^{(Cx+1) \cdot 2\frac{\sqrt{ab}}{x}} = \frac{x + bxxy + \sqrt{ab}}{-x - bxxy + \sqrt{ab}}$. Mais C eſt une quantité arbitraire.

1°. Je la ſuppoſe une quantité infinie poſitive, le premier membre de l'équation exponentielle ſera infini : il faudra donc néceſſairement que l'autre le ſoit auſſi. Or c'eſt ce qui arrive, lorſque ſon dénominateur eſt $= 0$, on aura donc $-x - bxxy + \sqrt{ab} = 0$, ce qui donne $y = \frac{-x+\sqrt{ab}}{bxx}$, ou $y = -\frac{1}{bx} + \frac{1}{xx}\sqrt{\frac{a}{b}}$, équation compriſe dans l'intégrale de $-ax^{-4}dx + byydx = dy$.

2°. Si on ſuppoſe C une quantité infinie négative, le premier membre de l'équation (D) ſera $= 0$, donc le numérateur du ſecond membre ſera auſſi $= 0$; c'eſt-à-dire qu'on aura $x + bxxy + \sqrt{ab} = 0$: ce qui donne $y = -\frac{1}{bx} - \frac{1}{xx}\sqrt{\frac{a}{b}}$; & combinant l'une & l'autre valeur de y, on a $y = -\frac{1}{bx} \pm \frac{1}{xx}\sqrt{\frac{a}{b}}$ pour l'intégrale cherchée de l'équation $-ax^{\frac{-4h}{2h-1}}dx + byydx = dy$ dans laquelle on ſuppoſe $h = 1$.

On voit par là comment il faudra s'y prendre pour trouver l'intégrale de cette même équation, en donnant ſucceſſivement à h différentes valeurs.

CHAPITRE

CHAPITRE X.

Recherche générale de l'intégration des équations à quatre termes.

CXXII.

TOutes les équations à quatre termes peuvent se réduire à l'une de ces deux formes,

$$x^m\,dx + by^p\,x^n\,dx + cy^s\,dx + a\,dy = 0$$

ou $x^m\,dx + by^p\,dx + cy^s\,x^r\,dy + a\,dy = 0$.

Ces équations sont toutes compriſes dans deux formules.

1°. Si l'on cherche, comme on a fait pour les équations à trois termes, les cas où ces ſortes d'équations peuvent être intégrées, on trouvera dans le premier cas $p = \frac{m-n}{m+1}$ & . . . . . $s = \frac{m}{m+1}$. Car ſoit $x^m\,dx + by^p\,x^n\,dx + cy^s\,dx + a\,dy = 0$, & faiſons $x = u^{\frac{1}{m+1}}$, en mettant dans la transformée pour p & s leurs valeurs, on aura l'équation ſuivante $\frac{du}{m+1} + \frac{by^{\frac{m-n}{m+1}}\,u^{\frac{n-m}{m+1}}\,du}{m+1} + \frac{cy^{\frac{m}{m+1}}\,u^{\frac{-m}{m+1}}\,du}{m+1} + a\,dy = 0$, laquelle eſt homogene. Donc, &c.

Premiere maniere de chercher les cas d'intégration de ces formules.

En examinant ceux dans leſquels elles peuvent devenir homogenes.

2. Dans le ſecond cas nous avons déja vu (Chap. VI. Art. LXXXVI.) que l'équation à quatre termes $ax^m y^n\,dx + by^p x^q\,dx + cx^r y^s\,dy + fx^e y^u\,dy = 0$, qui eſt plus générale que la précédente, devenoit homogene, 1°. ſi l'on avoit $(s-p+1).(q-m) = (q-r+1).(n-p)$;

2°. $(n-p+1).(q-m) = (q-e+1).(n-p)$.
Comparant cette équation avec la proposée, on a $n = 0$

$q = 0$

$e = 0$

$a = 0$

ce qui nous avertit qu'on doit avoir $\frac{s+1}{m+1-r} = \frac{p}{m}$, & $p = \frac{m}{m+1}$, c'est-à-dire $p = \frac{m}{m+1}$ & $s = \frac{-r}{m+1}$. Ensuite on fera $x = u^{\frac{1}{m+1}}$, ce qui donne, en substituant ces différentes valeurs, la transformée $\frac{du}{m+1} + \frac{by^{\frac{m}{m+1}} u^{\frac{-m}{m+1}} du}{m+1}$ $+ cu^{\frac{r}{m+1}} y^{\frac{-r}{m+1}} dy + ady = 0$, homogene comme dans le cas précédent.

CXXIII.

Nouvelle méthode pour chercher les cas d'intégration des équations à quatre termes.

Mais il y a d'autres méthodes pour découvrir encore de nouveaux cas d'intégration dans les formules précédentes : nous allons les examiner, 1°. pour la formule $x^m dx + by^p x^n dx + cy^s dx + ady = 0$.

Appliquée à la premiere formule.

Il est visible que si dans cette équation on fait $y = gu^q x^h$, elle se changera en une équation de cinq termes, dont on pourra supposer que deux se détruisent dans certains cas particuliers, ce qui réduira la transformée à trois termes. L'équation de cinq termes est $x^m dx + bg^p u^{pq} x^{n+ph} dx + cg^s u^{qs} x^{hs} dx + agqu^{q-1} x^h du + agbhu^{h-1} u^q dx = 0$, équation dans laquelle on voit d'abord que si on suppose 1°. $bg^p u^{qp} x^{n+ph} dx +$

$cg^s u^{qs} x^{hs} dx = 0$, on aura . . . . . $s = p$

$n = 0$

$b = -c$

& la propoſée ſera par conſéquent $x^m dx + ady = 0$, qui n'a que deux termes. Donc on ne peut faire cette premiere ſuppoſition.

2°. On ne peut ſuppoſer non plus $cg^s u^{qs} x^{hs} dx + aghx^{h-1} u^q dx = 0$, comme il eſt aiſé de le voir; car alors on auroit $s = 1$ & $h = h - 1$; ce qui eſt abſurde.

3°. La ſeule ſuppoſition qu'on puiſſe faire ſans que la propoſée ſe réduiſe à n'avoir que deux termes, eſt celle de $bg^p u^{qp} x^{n+ph} dx + aghx^{h-1} u^q dx = 0$, qui nous donne . . . . . $p = 1$

$n = -1$

$h = -\frac{b}{a}$

Donc en faiſant $y = gu^q x^{-\frac{b}{a}}$, ou ſimplement $y = ux^{-\frac{b}{a}}$, l'équation $x^m dx + byx^{-1} dx + cy^s dx + ady = 0$ ſe réduit à celle-ci de trois termes $x^m dx + cu^s x^{-\frac{bs}{a}} dx + agx^{-\frac{b}{a}} du = 0$. Or il eſt évident 1°. que cette équation eſt intégrable ou au moins conſtructible, ſi $m = -\frac{bs}{a}$: car alors on a $\frac{dx}{x^{\frac{bs}{a}}} + \frac{cu^s dx}{x^{\frac{bs}{a}}} + \frac{agdu}{x^{\frac{b}{a}}} = 0$; & multipliant toute l'équation par $x^{\frac{bs}{a}}$, on a $dx + cu^s dx + ax^{\frac{-b+bs}{a}} du = 0$; ou enfin $\frac{dx}{x^{\frac{-b+bs}{a}}} =$

Equation transformée.

Cas dans leſquels elle eſt intégrable ou conſtructible.

$\frac{-adu}{1+cu^s}$; équation dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées. Donc l'équation $x^m dx + byx^{-1} dx + cy^s dx - \frac{bs}{m} dy = 0$ eſt intégrable.

2°. Si on réduit l'équation $x^m dx + cu^s x^{-\frac{bs}{a}} dx + ax^{-\frac{b}{a}} du = 0$ à la forme $x^m dx + ady + by^p dx = 0$, en la mettant ſous celle-ci $x^{m+\frac{b}{a}} dx + cu^s x^{-\frac{bs}{a}+\frac{b}{a}} dx + adu = 0$, & qu'on faſſe $x^{-\frac{bs}{a}+\frac{b}{a}+1} = z$; ce qui donne $x = z^{\frac{a}{-bs+b+a}}$ &c. on aura après les ſubſtitutions ordinaires $z^{\frac{am+bs}{-bs+b+a}} dx + qdu + ku^s dz = 0$: d'où l'on conclura que ſi $s = \frac{m}{m+1}$, on peut intégrer, puiſqu'alors l'équation eſt $z^m dz + qdu + ku^{\frac{m}{m+1}} dz = 0$, qui devient homogene en faiſant $z = y^{\frac{1}{m+1}}$. En effet, cette transformation nous donne $Ay^{\frac{m}{m+1}} dy + qy^{\frac{m}{m+1}} du + Bu^{\frac{m}{m+1}} dy = 0$.

Si $s = 1$, alors l'équation devient $qdu + kudz + z^{\frac{am+b}{a}} dz = 0$, dans laquelle les indéterminées ſe ſéparent par la méthode du Chapitre VII.

De même ſi $s = 2$, l'intégration ſera poſſible toutes les fois que $\frac{am+2b}{a+b} = \frac{-4n}{2n+1}$, n exprimant un nombre entier poſitif, puiſqu'alors c'eſt le cas de l'équation de Ricati.

CXXIV.

Application de cette même méthode à la seconde formule.

En appliquant cette méthode à la seconde formule des équations à quatre termes $x^m dx + by^p dx + cy^s x^r dy + ady = 0$ mise sous cette autre forme plus commode & aussi générale $dx + by^p x^r dx + cy^s x^n dy + ady = 0$, on trouve outre les cas dont l'intégration se présente d'elle-même, ou qui se rapportent à ceux dans lesquels $p = \frac{m}{m+1}$ & $s = \frac{-r}{m+1}$, on trouve, dis-je, qu'en supposant . . . . . $c = -b$

$$s = p - 1$$

$$n = r + 1$$

l'équation $dx + by^p x^r dx - by^{p-1} x^{r+1} dy + ady = 0$ sera toujours intégrable en faisant $y = ux$. En effet la transformée devient alors $(1 + au)dx + axdu - bu^{p-1} x^{r+p+1} du = 0$, qui est intégrable par la méthode générale du Chapitre VII.

CXXV.

SCHOLIE. Après avoir examiné les cas dans lesquels on peut intégrer chacune des deux formules des équations à quatre termes, il ne sera pas inutile de chercher aussi les cas d'intégration de l'équation $x^m dx + ady + byx^n dx$ $cyydx = 0$, qui ne differe de celle de Ricati que par le terme $byx^n dx$. C'est ce que nous allons faire dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE XI.

Examen des cas d'intégration de l'équation $x^m dx + ady + byx^n dx + cyy dx = 0$.

CXXVI.

PROBLEME. TRouver les cas d'intégrabilité de l'équation $x^m dx + ady + byx^n dx + cyy dx = 0$.

Transformation néceſſaire dans le cas préſent.

SOLUTION. Soit $y = px^r + fx^s z^t$; on voit bien que p, r, s, t, f étant des indéterminées que nous prenons à volonté, nous ſerons les maîtres de leur donner dans la ſuite telle valeur que nous voudrons. Après les ſubſtitutions on aura la transformée ſuivante (A) $x^m dx$

Equation transformée.

$+ aprx^{r-1} dx + afsz^s x^{s-1} dx + aftx^s z^{s-1} dz + bpx^{r+n} dx + bfx^{s+n} z^s dx + cppx^{2r} dx + 2cpfx^{r+s} z^s dx + cffx^{2s} z^{2s} dx = 0$; pour abreger, on laiſſera dans la ſolution ſuivante p au lieu de ſa valeur $\frac{-1}{b+fam+a}$.

CXXVII.

Premiere ſuppoſition pour cette équation.

Soit d'abord $afsz^s x^{s-1} dx + bfx^{s+n} z^s dx = 0$, on aura . . . . . $n = -1$

$s = -\frac{b}{a}$.

Soit encore . . . . . $m = r - 1$

& . . . . . $bp + apr + 1 = 0$

$t = 1$

$f = 1$;

la transformée (*A*) ſera $(1+apr+bp).x^{r-1}dx - bzx^{-\frac{b}{a}-1}dx+ax^{-\frac{b}{a}}dz+bzx^{-\frac{b}{a}-1}dx+cppx^{2r}dx + 2pczx^{r-\frac{b}{a}}dx+cz^2x^{-\frac{2b}{a}}dx=0$: & en réduiſant cette équation ſuivant les ſuppoſitions précédentes, elle devient (*B*) $cppx^{2r}dx+ax^{-\frac{b}{a}}dz+2cpx^{r-\frac{b}{a}}zdx + cx^{-\frac{2b}{a}}zzdx=0$, d'où l'on tire ce premier Théorême.

THÉOREME 1. Si l'équation $x^m dx+ady+byx^{-1}dx+cyydx=0$ eſt intégrable, l'équation $cppx^{2m+2+\frac{b}{a}}dx+adz+2cpx^{m+1}zdx+cx^{-\frac{b}{a}}z^2dx=0$ eſt auſſi intégrable. Nous fournit trois Théorêmes.

DÉMONSTRATION. A cauſe de $r=m+1$ & $t=1$ $s=-\frac{b}{a}$ la ſuppoſition de $y=px^r+fx^tz^s$ devient ici $y=px^{m+1}+x^{-\frac{b}{a}}z$; ce qui donne la transformée ſuivante $(bp+amp+ap+1).x^m dx - bzx^{-\frac{b}{a}-1}dx + ax^{-\frac{b}{a}}dz+bzx^{-\frac{b}{a}-1}dx+cppx^{2m+2}dx + 2cpzx^{m+1-\frac{b}{a}}dx+czzx^{-\frac{2b}{a}}dx=0$; mais à cauſe de $r=m+1$, la ſuppoſition précédente de $bp+apr+1=0$, ſe change en $bp+amp+ap+1=0$; multipliant de plus toute l'équation par $x^{\frac{b}{a}}$, & effaçant

ce qui ſe détruit, on a $cppx^{2m+2+\frac{b}{a}}dx + adz + 2cpzx^{m+1}dx + czzx^{-\frac{b}{a}}dx = 0$. Donc, &c. C'eſt ce qu'on trouveroit de même en mettant dans l'équation (B) pour r ſa valeur $m+1$.

En ſuppoſant toujours . . . . . $s = -\frac{b}{a}$.

$n = -1$

$f = 1$

$t = 1$

Soit encore . . . . . $r = -1$

$cp + b - a = 0$

la transformée générale (A) devient l'équation ſuivante $x^m dx + cppx^{-2}dx + bpx^{-2}dx - apx^{-2}dx - bzx^{-\frac{b}{a}-1}dx + ax^{-\frac{b}{a}}dz + bzx^{-\frac{b}{a}-1}dx + 2cpx^{-\frac{b}{a}-1}zdx + cx^{-\frac{2b}{a}}zzdx = 0$, qui devient à cauſe de l'hypotheſe de $cp + b - a = 0$, & en effaçant ce qui ſe détruit, $x^m dx + ax^{-\frac{b}{a}}dz + 2cpx^{-\frac{b}{a}-1}zdx + cx^{-\frac{2b}{a}}z^2 dx = 0$, d'où l'on tire ce ſecond Théorême.

THÉOREME 2. Si l'équation $x^m dx + ady + bx^{-1}ydx + cyydx = 0$ eſt intégrable, l'équation $x^m dx + ax^{-\frac{b}{a}}dz + 2cpx^{-\frac{b}{a}-1}zdx + cx^{-\frac{2b}{a}}z^2 dx = 0$ l'eſt auſſi.

Enfin en laiſſant toujours la ſuppoſition de $s = -\frac{b}{a}$

$n = -1$

$f = 1$

$t = 1$

faiſant

faiſant de plus . . . . . $r = \frac{m}{2}$

$p = \sqrt{-\frac{1}{c}}$,

on trouvera de la même façon que ci-deſſus le Théorême ſuivant.

THÉOREME 3. Si l'équation $x^m dx + a dy + b y x^{-1} dx + c y y dx = 0$ eſt intégrable, l'équation $(apr + bp) . x^{\frac{m}{2}-1} dx + a x^{-\frac{b}{a}} dz + 2cpz x^{\frac{m}{2}-\frac{b}{a}} dx + czz x^{-\frac{2b}{a}} dx = 0$, qui eſt ſa transformée en ſuppoſant $y = p x^{\frac{m}{2}} + x^{-\frac{b}{a}} z$, l'eſt auſſi.

CXXVIII.

SCHOLIE 1. Les trois Théorêmes précédents nous donnent trois équations dont l'intégration dépend de celle de $x^m dx + a dy + b y x^{-1} dx + c y y dx = 0$; mais nous prouverons dans le Théorême 7 ſuivant que cette équation, lorſque $b = 2a$, eſt intégrable dans les mêmes cas que celle de Ricati. Donc les trois équations $cpp x^{2m+4} dx + a dz + 2cpz x^{m+1} dx + c x^{-2} z^2 dx = 0$, $x^m dx + a x^{-2} dz + 2cpz x^{-3} dx + cz^2 x^{-4} dx = 0$, & $(apr + 2ap) . x^{\frac{m}{2}-1} dx + a x^{-2} dz + 2cpz x^{\frac{m}{2}-2} dx + cz^2 x^{-4} dx = 0$, ſont auſſi intégrables dans les mêmes cas que l'équation de Ricati.

CXXIX.

Seconde ſuppoſition qui donne auſſi trois Théorêmes.

Soit maintenant $af ix^{i-1} z^i dx + 2cpf x^{r+i} z^i dx = 0$,

ce qui donne . . . . . $r = -1$

$s = -\frac{2cp}{a}$

Soit auſſi . . . . . $cp = a$,

ce qui donne . . . . . $s = -2$

& ſoit encore . . . . . $n = m+1$;

$p = -\frac{1}{b}$

f & $t = 1$,

on trouvera le Théorême ſuivant.

THÉOREME 4. En général toutes les équations $x^m dx + ady + byx^{m+1} dx - aby^2 dx = 0$ ſont intégrables.

DÉMONSTRATION. La ſubſtitution qu'il faut faire dans le cas préſent eſt celle-ci, $y = px^{-1} + x^{-2} z$; mettant les valeurs qu'elle fournit pour y & dy dans l'équation précédente, elle devient $x^m dx - apx^{-2} dx - 2cpzx^{-3} dx + ax^{-2} dz + bpx^m dx + bzx^{m+1} dx - abp^2 x^{-2} dx - 2abpzx^{-3} dx - abx^{-4} z^2 dx = 0$. Subſtituant dans cette équation pour p ſa valeur $-\frac{1}{b}$, ſuivant l'hypotheſe de $cp = a$, & effaçant ce qui ſe détruit, on aura pour transformée l'équation ſuivante, $adz + bzx^{m+1} dx - abz^2 x^{-2} dx = 0$, qui s'integre par la méthode générale du Chapitre VII.

Suppoſant encore . . . . . $r = -1$

$cp = a$

$s = -2$

$n = m+1$

f & $t = 1$,

on découvre la propoſition ſuivante.

THÉOREME 5. Si l'équation $x^m dx + ady + byx^{m+1} dx + cyy dx = 0$ eſt intégrable, la ſuivante, $(bp+1).x^m dx + ax^{-2} dz + bx^{m-1} z dx + cx^{-4} z^2 dx = 0$, qui eſt ſa transformée, en ſuppoſant $y = px^{-1} + x^{-2} z$, l'eſt auſſi. Or nous venons de voir (Théorême 4.) qu'on ſéparoit les indéterminées dans l'équation $x^m dx + ady + byx^{m+1} dx + cyydx = 0$, lorſque $c = -ab$; donc on les ſéparera de même dans l'équation $(bp+1).x^m dx + ax^{-2} dz + bx^{m-1} zdx + czzx^{-4} dx$; ce qui eſt évident, puiſque la ſuppoſition de $c = -ab$, donne $abp + a = 0$, & par conſéquent $bp + 1 = 0$. Donc on aura $ax^{-2} dz + bx^{m-1} z dx + czzx^{-4} dx = 0$, équation intégrable par la méthode du Chapitre VII.

Suppoſant toujours . . . . . $r = -1$

$s = -\frac{2cp}{a}$

f & $t = 1$

& faiſant . . . . . $m = -2$

$cpp - ap + 1 = 0$

on trouvera le Théorême ſuivant.

THÉOREME 6. Si l'équation $x^{-2} dx + ady + byx^n dx + cyy dx = 0$ eſt intégrable; l'équation $bpx^{n-1} dx + ax^{-\frac{2cp}{a}} dz + bx^{n-\frac{2cp}{a}} z dx + cx^{-\frac{4cp}{a}} zz dx = 0$ l'eſt auſſi. On démontrera cette propoſition à peu près de la même façon que les précédentes.

CXXX.

Troiſieme ſuppoſition.

Soit enfin cette autre ſuppoſition, $bfx^{s+n}z^t dx + 2cpfx^{r+s}z^t dx = 0$, on en tire . . $r = n$

$$p = -\frac{b}{2c};$$

Soit auſſi . . . . . $n = -1$

$$s = 1$$

$$t = 1$$

& . . . . . $cpp + bp - ap = 0$,

ce qui donne . . . . . $b = 2a$,

on trouvera la propoſition ſuivante.

Fournit trois nouveaux Théorêmes.

THÉOREME 7. $x^m dx + ady + bax^{-1}ydx + cyydx = 0$ eſt intégrable dans les mêmes cas que l'équation de Ricati.

DEMONSTRATION. Mettant dans la transformée générale (A) pour r, pour n & pour s leurs valeurs, & ſuivant la condition de $cpp + bp - ap = 0$; elle devient $x^m dx + azdx + bzdx + axdz + 2cpzdx + cz^2x^2dx = 0$. Mais à cauſe de $p = -\frac{b}{2c}$, cette équation ſe change en la ſuivante $x^m dx + azdx + axdz + cz^2x^2dx = 0$; & enfin en faiſant $xz = u$, on a $x^m dx + adu + cuudx = 0$ qui eſt l'équation même de Ricati.

En ſuppoſant toujours . . . . . $r = n$

$$p = \frac{-b}{2c};$$

& ſuppoſant de plus . . . . . $n - 1 = m$

$$apr + 1 = 0,$$

on tire des ſuppoſitions précédentes . . $c = \frac{-b}{2p}$

& . . . . . $p = -\frac{1}{ar} = \frac{-1}{am+a}$.
Donc $c = \frac{abm+ab}{2}$. Ces conditions nous donnent le Théorême ſuivant.

THE'OREME 8. L'équation $x^m dx + ady + byx^{m+1} dx + \left\{\frac{abm+ab}{2}\right\} . yydx = 0$ s'integre dans les mêmes cas que ceux dans leſquels on peut intégrer l'équation de Ricati.

DE'MONST. Subſtituant dans la transformée générale (A) pour r, s, n leurs valeurs, & effaçant ce qui ſe détruit, elle ſe change dans l'équation ſuivante, $azdx + axdz - \frac{bb}{4c} x^{2m+2} dx + cz^2 x^2 dx = 0$; & en faiſant $xz = u$, $\frac{-bb}{4c} = B$, on aura $Bx^{2m+2} dx + adu + cu^2 dx = 0$, qui eſt l'équation de Ricati.

THE'OREME 9. Si on ne ſuppoſe pas $apr + 1 = 0$, on trouvera qu'en général ſi $x^m dx + ady + byx^{m+1} dx + cyydx = 0$ eſt intégrable, alors $(cpp + bp) . x^{2m+2} dx + (apr + 1) . x^m dx + adu + cu^2 dx = 0$ l'eſt auſſi. C'eſt ce qui eſt évident par l'inſpection ſeule de la transformée générale (A), en y mettant ſeulement pour r, s, & n leurs valeurs, & en y faiſant $xz = u$.

CXXXI.

SCHOLIE 2. En ſuppoſant $x^m dx + ady = fdz$, ce qui donne . . . . $\frac{x^{m+1}}{m+1} + ay = fz$ & . . . . . $y = \frac{fz - \frac{x^{m+1}}{m+1}}{a}$, Autre transformation dont on peut encore ſe ſervir.

l'équation $x^m dx + ady + byx^n dx + cyy dx = 0$

Equation transformée. devient $(X)\ fdz + \frac{bfzx^n dx}{a} - \frac{bx^{m+1+n}dx}{m+1} + \frac{cf^2z^2dx}{aa} - \frac{2cfzx^{m+1}dx}{m+1} + \frac{cx^{2m+2}dx}{(m+1)^2} = 0.$

CXXXII.

Premiere supposition pour cette équation. Supposant 1°. dans la transformée $(X) - \frac{bx^{m+1+n}dx}{a.(m+1)} + \frac{cx^{2m+2}dx}{aa.(m+1)^2} = 0$, ou bien $cx^{2m+2}dx = (m+1).abx^{m+1+n}dx$, on en tire . . . . $c = (m+1).ab$

$m = 1$

$n = 2$;

ce qui donne le Théorême suivant.

Nous donne un Théorême. THE'OREME 10. $x^m dx + ady + byx^{m+1}dx + (m+1).aby^2dx = 0$ est intégrable. Car par les suppositions précédentes la transformée générale (X) devient $a^2fdz - (m+1).abzx^{m+1}dx + (m+1).fcz^2dx = 0$, équation dans laquelle les indéterminées se séparent par la méthode du Chapitre VII.

CXXXIII.

Seconde supposition qui donne aussi un Théorême. 2°. Supposant $\frac{bfzx^n dx}{a} - \frac{2cfzx^{m+1}dx}{aa.(m+1)} = 0$, on en tire $n = m+1$; $c = \left\{\frac{m+1}{2}\right\}.ab$, ce qui nous donne le Théorême suivant.

THE'OREME 11. $x^m dx + ady + byx^{m+1}dx +$

$\left\{\frac{m+1}{2}\right\}$. $aby^2dx = 0$ eſt intégrable dans les mêmes cas que $x^{2m+2}dx + adz + cz^2dx = 0$, comme on l'a trouvé déja ci-deſſus dans le Théorême 8. C'eſt ce qui eſt évident en obſervant dans la transformée (X) les conditions que donne la ſuppoſition précédente.

CXXXIV.

SCHOLIE 3. Si l'on fait dans l'équation $x^m dx +$ $ady + byx^n dx + cyydx = 0$, ... $n = 0$ s & $t = 1$, la transformée générale (A) devient (F) $x^m dx +$ $aprx^{r-1}dx + afzdx + afxdz + bpx^r dx + bfxzdx$ $+ cppx^{2r}dx + 2cpfx^{r+1}zdx + cffx^2z^2dx = 0$.

Dernier cas d'intégration de la formule.

CXXXV.

Soit maintenant dans cette derniere équation $bfxzdx$ $+ 2cpfx^{r+1}zdx = 0$, on en tire . . $r = 0$ $p = -\frac{b}{2c}$. Soit auſſi . . . . . $f = 1$. En effaçant ce qui eſt multiplié par zéro & ce qui ſe détruit dans l'équation (F), on a $x^m dx + azdx +$ $axdz - \frac{bb}{4c}dx + cx^2z^2dx = 0$; & enfin en faiſant $xz = u$, on a $x^m dx + adu - \frac{bb}{4c}dx + cu^2dx = 0$; ce qui nous donne le Théorême ſuivant.

THÉOREME 12. Si $x^m dx + ady + bydx + cyydx$ $= 0$ eſt intégrable, (B) $x^m dx - \frac{bb}{4c}dx + adu +$

$cu^2 dx = 0$ l'eſt auſſi. Donc réciproquement la premiere pourra être intégrée dans tous les cas où l'on integrera cette derniere.

On trouve, par exemple, que ſi $m = 2$ & $\frac{b^4}{16caa} = -1$, cette derniere équation (B) eſt intégrable. Car ſoit dans cette équation, $u = \frac{z}{a} + \frac{bbx}{4ac}$, on aura la transformée ſuivante $x^2 dx - \frac{bb}{4c} dx + dz + \frac{bbdx}{4c} + \frac{czzdx}{aa} + \frac{bbzxdx}{2aa} + \frac{b^4 x^2 dx}{16aac} = 0$. Or cette équation dans l'hypotheſe de $\frac{b^4}{16caa} = -1$ ſe réduit à la ſuivante $2aadz + bbzxdx + 2cz^2 dx = 0$, dans laquelle on ſépare les indéterminées. Donc (B) eſt intégrable dans le cas préſent. D'où il faut conclure que $x^2 dx + ady + bydx - \frac{b^4 y^2 dx}{16aa} = 0$ l'eſt auſſi.

CXXXVI.

Recherche des cas d'intégrabilité de deux nouvelles équations à quatre termes.

REMARQUE. Outre l'équation $x^m dx + ady + byx^n dx + cyydx = 0$, nous pouvons auſſi chercher les cas d'intégrabilité des deux équations

$$x^m dx + bx^n dx + ady + cyydx = 0$$

& . . $x^m dx + ady + bx^n dy + cyydx = 0$,

qui ne different non plus de l'équation de Ricati que par un ſeul terme.

CXXXVII.

Examen de la premiere.

Soit donc 1°. $x^m dx + bx^n dx + ady + cyydx = 0$, l'équation à intégrer : faiſons $y = px^r + fx^s z^t$, nous aurons $dy = rpx^{r-1} dx + ftx^s z^{t-1} dz + fsz^t x^{s-1} dx$, & pour transformée l'équation ſuivante, (D) $x^m dx + bx^n dx$

$bx^n dx + apr x^{r-1} dx + afs x^{s-1} z^t dx + aft z^{t-1} x^s dz + cppx^{2r} dx + 2cpfx^{r+s} z^t dx + cffx^{2s} z^{2t} dx = 0.$

Soit $afs x^{s-1} z^t dx + 2cfp x^{r+s} z^t dx = 0$, on en tire . . . . . $r = -1$

$s = -\frac{2cp}{a}$.

Soit . . . . . $cp = a$

$t = 1$,

on trouvera . . . . . $f = 1$.

THÉOREME 13. Si l'équation $x^m dx + bx^n dx + ady + cyydx = 0$ eſt intégrable, la ſuivante $x^m dx + bx^n dx + ax^{-2} dz + cx^{-4} z^2 dx = 0$ l'eſt auſſi ; puiſque c'eſt ſa transformée en faiſant $y = \frac{ax^{-1}}{c} + x^{-2} z$.

THÉOREME 14. Soit encore . . $r = -1$

$s = -\frac{2cp}{a}$,

& de plus ſoit . . . . . $m = -2$

& . . . . . $-ap + cpp + 1 = 0$;

on pourra intégrer l'équation $x^{-2} dx + bx^n dx + ady + cyydx = 0$ dans le cas où l'on peut intégrer la ſuivante $bx^n dx + afx^s dz + cffx^{2s} z^2 dx = 0$; ce qui eſt évident, puiſque c'eſt ſa transformée en faiſant $y = px^{-1} + x^{-1} z$, & effaçant ce qui ſe détruit par la ſuppoſition de $cpp - ap + 1 = 0$.

THÉOREME 15. Soit maintenant $x^m dx + aprx^{r-1} dx = 0$, on en tire . . . . . $r = m + 1$

. . . . . $apr = -1$.

Soit de plus . . . . . $cpp + b = 0$

$n = 2m + 2$

$$f = 1$$
$$t = 1$$
$$s = 1.$$

La transformée générale (D) devient ici $x^m dx + bx^{2m+2} dx + (m+1).apx^m dx + azdx + axdz + cppx^{2m+2} dx + 2cpx^{m+2} zdx + cz^2 x^2 dx = 0$, qui ſe réduit par les ſuppoſitions précédentes à $azdx + axdz + 2cpx^{m+2} zdx + cz^2 x^2 dx = 0$; qui eſt intégrable par la méthode du Chapitre VII.; ce qui eſt évident en mettant l'équation ſous cette forme $axdz + (a + 2cpx^{m+2}) zdx + cz^2 x^2 dx = 0$. D'où il ſuit que l'équation $x^m dx + bx^{2m+2} dx + ady - (m+1)^2 aaby^2 dx = 0$ eſt intégrable.

CXXXVIII.

Examen de la ſeconde équation.

2°. Examinons maintenant la formule $x^m dx + bx^n dy - ady + cyydx = 0$: faiſons $y = px^r + fx^s z^t$; on aura pour transformée l'équation ſuivante (Y) $x^m dx + bprx^{r+n-1} dx + bfsx^{n+s-1} z^t dx + bftx^{s+n} z^{t-1} dz + aprx^{r-1} dx + afsx^{s-1} z^t dx + aftz^{t-1} x^s dx + cppx^{2r} dx + 2cpfx^{r+s} z^t dx + cffx^{2s} z^{2t} dx = 0$.

Suppoſons maintenant $afsx^{s-1} z^t dx + 2cpfx^{r+s} z^t dx = 0$, on aura $r = -1$

$$s = -\frac{2cp}{a},$$

Soit $cp = a$

$$n = m+2$$
$$bp - 1 = 0,$$

on en conclura,

THE'OREME 16. que $x^m dx + bx^{m+2} dy + ady + aby^2 dx = 0$ eſt intégrable.

DEMONST. Car par les conditions précédentes la transformée générale (Y) devient ici $x^m dx - bpx^m dx - 2bzx^{m-1} dx + bx^m dz - apx^{-2} dx - 2ax^{-3} zdx + ax^{-2} dz + abppx^{-2} dx + 2abpx^{-3} zdx + abx^{-4} z^2 dx = 0$; laquelle, après les réductions que donne la ſuppoſition de $bp - 1 = 0$, devient étant multipliée par xx, $(a + bx^{m+2}) . dz - 2bzx^{m+1} dx + cz^2 x^2 dx = 0$, qui, comme on le voit, eſt dans le cas de notre méthode générale du Chapitre VII.

Soit enſuite $bfsx^{n+s-1} z^t dx + 2cpfx^{r+s} z^t dx = 0$, on en tire . . . . . $r = n - 1$

$$s = -\frac{2cp}{br}.$$

Soit à préſent . . . . $cp + br = 0$

f & $t = 1$

$m = n - 2$

$apr + 1 = 0$, on aura $s = 2$.

Ces ſuppoſitions nous donnent le Théorême ſuivant.

THE'OREME 17. $x^m dx + bx^{m+2} dy + ady + (m+1)^2 . aby^2 dx = 0$ eſt intégrable. Car ſubſtituant dans la transformée générale (Y) pour r, n, s, f, t, leurs valeurs, faiſant les réductions qu'amenent les ſuppoſitions de $cp + bm + b = 0$, & de $apm + ap + 1 = 0$, on aura l'équation ſuivante $(ax^2 + bx^{m+4}) . dz + 2axzdx + (m+1)^2 . abz^2 x^3 dx = 0$. Donc, &c.

CXXXIX.

REMARQUE. Il eſt bon d'obſerver ici qu'une équation $x^m dx + by^n x^p dx + cx^s y^r dy + a dy = 0$, ou $x^m dx + a dy + by^n x^p dx + cy^r dx = 0$, ne peut être changée par transformation en une autre de la même forme, & dont les coefficiens ſoient tous trois donnés. Il ne peut y avoir que deux de ces coefficiens de donnés. La raiſon en eſt qu'en faiſant $x = fu$, $y = gz$, on formera trois équations différentes, quoiqu'on n'ait que deux inconnues f, g.

CHAPITRE XII.

Méthode pour conſtruire les équations différentielles à deux variables, dans leſquelles l'une des deux indéterminées manquent.

CXL.

Procédé de la méthode.

TOute équation différentielle à deux variables, à quelque degré que les dx & les dy y ſoient élevées, ſe conſtruit toujours lorſque l'une des deux indéterminées finies y manque. La méthode qu'il faut ſuivre dans ce cas,

Quelle eſt la ſubſtitution qu'elle employe.

conſiſte à faire $dx = \frac{z\,dy}{a}$, ſi c'eſt x qui manque, ou $dy = \frac{z\,dx}{a}$ ſi c'eſt y qui manque. (z eſt une nouvelle indéterminée, & a une conſtante quelconque.) Car par

cette ſubſtitution, en mettant, par exemple, $\frac{z\,dy}{a}$ au lieu de dx dans la propoſée, il eſt évident qu'on aura une transformée toute diviſible par une puiſſance de dy qui ſe trouvera la même par-tout, & par conſéquent que la transformée ſera toute compoſée de quantités finies. On aura auſſi la valeur de z en y & en conſtantes, & la raiſon d'y à z, ſera exprimée par une équation ou par une courbe algébrique. Mettant donc dans l'équation $dx = \frac{z\,dy}{a}$ pour dy ſa valeur trouvée par le procédé précédent, les indéterminées ſeront ſéparées.

Application de la méthode à quelques exemples.

Pour faire mieux ſentir l'eſprit de cette méthode, appliquons-la à quelques exemples.

CXLI.

Premier exemple.

Soit l'équation $y\,dy^3\,dx = a\,dx^4 + 2a\,dx^2\,dy^2 + a\,dy^4$, dans laquelle il ne ſe trouve aucune dimenſion finie de x. Suivant ce que nous venons de dire, je fais $dx = \frac{z\,dy}{a}$; $dx^2 = \frac{zz\,dy^2}{aa}$; $dx^4 = \frac{z^4\,dy^4}{a^4}$. Mettant ces valeurs de dx, dx^2, dx^4 dans la propoſée, j'ai la transformée ſuivante $\frac{zy\,dy^4}{a} = \frac{z^4\,dy^4}{a^3} + \frac{2zz\,dy^4}{a} + a\,dy^4$, c'eſt-à-dire, en diviſant par dy^4 qui eſt commun à tous les termes $\frac{zy}{a} = \frac{z^4}{a^3} + \frac{2zz}{a} + a$; de cette équation je tire aiſément la valeur de $y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$; & celle de $dy = \frac{3z^2\,dz}{aa} + 2dz - \frac{aa\,dz}{zz}$: donc $\frac{z\,dy}{a} = dx = \frac{3z^3\,dz}{a^3} + \frac{2z\,dz}{a} - \frac{a\,dz}{z}$. J'integre cette équation. Son intégrale eſt $x - \frac{3z^4}{4a^3} - \frac{zz}{a} + a\,lz + C = 0$.

On a donc la valeur des deux coordonnées x & y de la propoſée par le moyen de deux courbes qui ont une indéterminée commune z.

Figure 5. Ayant donc pris les abſciſſes z ſur l'axe AB, je décris la courbe DEC de l'équation $y = \frac{z^2}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$, & la courbe NLM de l'équation $x - \frac{3z^4}{4a^3} - \frac{zz}{a} + alz + C = 0$. . . . . $BC = y$

$BM = x$

ſeront les coordonnées de la courbe différentielle propoſée.

Pour la conſtruire je mene KO parallele à BM, je prolonge MO en Q, enſorte qu'on ait toujours $OQ = BC$, & QPR ſera la courbe cherchée.

CXLII.

Second exemple. Soit encore l'équation $y^3\,dx^5 + aay\,dy\,dx^4 = a^3\,dy^5$. Je fais $dx = \frac{z\,dy}{a}$, & après les mêmes ſubſtitutions que dans l'exemple précédent, il me vient ici $\frac{y^3 z^5 dy^5}{a^5} + \frac{aaz^4 y dy^5}{a^4} = a^3\,dy^5$, & en réduiſant $y^3 z^5 + a^3 y z^4 = a^8$.

Figure 6. Pour avoir la courbe de l'équation différentielle propoſée, ſur l'axe DH, je conſtruis la courbe EF de l'équation $z^5 y^3 + a^3 z^4 y = a^8$; CD étant $= y$, & $CF = z$. Sur FC prolongée je prends CA égal à l'eſpace $DCFE$ diviſé par a: on aura donc $CA = \int \frac{z\,dy}{a} = x$, & le point A appartient à la courbe cherchée.

CXLIII.

SCHOLIE. Cette méthode eſt, comme on le voit,

assez étendue, d'autant plus qu'elle s'applique, comme nous le dirons dans la suite, aux différentielles d'un ordre plus élevé que le premier degré. M. d'Alembert en donne une encore plus générale dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin, année 1748. Sa méthode a deux avantages. 1°. Elle ne suppose pas qu'une des deux indéterminées manque dans l'équation. 2°. Elle mene tout de suite à l'intégration. Nous allons l'expliquer dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE XIII.

Méthode pour intégrer plusieurs équations différentielles dans lesquelles dx *&* dy *sont élevées à différentes puissances.*

CXLIV.

DEMANDE. NOus supposerons toujours dans ce Chapitre $z = \frac{dx}{dy}$, & il ne faut pas oublier que $\frac{dx}{dy}$ est une quantité finie, comme nous l'avons dit Article XXXIV.

CXLV.

AVERTISSEMENT. La supposition qu'on fait ici de $\frac{dx}{dy} = z$, donne $dz = \frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dy^2}$; par conséquent, comme dans les deux méthodes pour lesquelles la présente supposition a lieu, dz se rencontre assez souvent, il

ſembleroit que ces méthodes appartiennent aux différentielles du ſecond ordre. Cependant nous avons cru devoir les traiter ici, parce que dz y eſt ſous une forme de différentielle du premier degré.

CXLVI.

Conditions qu'exige cette méthode.

PROBLEME 1. Trouver l'intégrale d'une équation différentielle qui renferme telles fonctions qu'on voudra de dx & de dy, & dans laquelle x & y ſe trouvent, pourvu qu'ils ne ſoient ni multipliés ni diviſés l'un par l'autre, ni élevés à aucune puiſſance plus grande que l'unité.

Formule des équations auxquelles on la peut appliquer.

SOLUTION. Ces ſortes d'équations peuvent ſe repréſenter par la formule $x = y\varphi z + \Delta z$ (φz & Δz marquant des fonctions quelconques de z, c'eſt-à-dire de $\frac{dx}{dy}$).

Procédé de la méthode appliquée à cette formule.

Je commence par différentier cette formule, j'ai $dx = dy\varphi z + yd(\varphi z) + d(\Delta z)$; ou mettant pour dx ſa valeur zdy, on a $zdy = dy\varphi z + yd(\varphi z) + d(\Delta z)$; ou $dy(\varphi z - z) + yd(\varphi z) + d(\Delta z) = 0$. Donc $dy + \frac{yd(\varphi z) + d(\Delta z)}{\varphi z - z} = 0$, équation qui eſt dans le cas de la méthode de M. Bernoulli que nous avons expliquée dans le Chapitre VII., & de laquelle on tire aiſément la valeur de y en z; car en prenant c pour le nombre dont le logarithme eſt l'unité, on a $yc^{\int \frac{d(\varphi z)}{\varphi z - z}} + \int \frac{d(\Delta z)}{\varphi z - z} \times c^{\int \frac{d(\varphi z)}{\varphi z - z}} = A$. ($A$ eſt une conſtante quelconque ajoutée pour rendre l'intégrale complete.) Par conſéquent on trouvera auſſi la valeur de x, puiſque $dx = zdy$, & $x = \int zdy$.

CXLVII.

CXLVII.

Corollaire. Si $x = y\varphi z$, c'eſt le cas des équations homogenes que nous avons appris à intégrer dans le Chapitre V. Il eſt cependant pris ici dans un autre ſens que celui des équations homogenes de M. Bernoulli. Car ici on a $\frac{x}{y} = \varphi z = \varphi \frac{dx}{dy}$, au lieu que dans le cas de M. Bernoulli on a $\frac{dx}{dy} = \varphi \frac{x}{y}$. Quoique ces deux cas rentrent l'un dans l'autre, cependant il ſeroit quelquefois fort difficile de ramener le premier au ſecond; c'eſt-à-dire, de tirer de $\frac{x}{y} = \varphi \frac{dx}{dy}$, l'équation $\frac{dx}{dy} = \varphi \frac{x}{y}$. C'eſt pourquoi il étoit fort utile d'avoir une méthode particuliere pour chacun de ces deux cas. Celle que nous expliquons ici apprend en général à intégrer toute équation $x = y\varphi z$, φz étant une fonction quelconque de z, même avec des ſignes *ſ.*

Le cas des équations homogenes ſe réſout par cette méthode.

CXLVIII.

Néanmoins cette méthode ſuppoſe qu'on ait la valeur de $\frac{x}{y}$ en z; mais on peut par un autre moyen réſoudre encore plus généralement le cas préſent. Soit, comme dans tout ce Chapitre, $z = \frac{dx}{dy}$, & $x = yk$, (z & k étant deux nouvelles changeantes) la propoſée devient une équation algébrique quelconque entre z & k. Je conſtruis la courbe qui eſt le lieu de cette équation, & j'ai pour chaque z la correſpondante k, & *vice verſâ*. Or de ce que $x = yk$, & $dx = zdy$, il s'enſuit qu'on aura $zdy = ydk + kdy$, & $\frac{dy}{y} = \frac{dk}{z-k}$; donc nous parviendrons à

Autre maniere plus générale de réſoudre le cas des équations homogenes.

trouver la valeur de y en conſtruiſant & en quarrant la courbe dont les abſciſſes ſont k, & dont les ordonnées ſont $\frac{1}{z-k}$.

CXLIX.

Auſſi bien que l'équation du Chap. VI. Art. XC.

COROLLAIRE 2. L'équation $gx\,dx + hy\,dx + f\,dx = ax\,dy + by\,dy + c\,dy$, pour laquelle nous avons donné une méthode particuliere, eſt auſſi un cas particulier du Problême précédent. En effet, cette équation eſt la même que la ſuivante $dx = \left\{\frac{ax+by+c}{gx+hy+f}\right\} dy$, ou $\frac{dx}{dy} = \frac{ax+by+c}{gx+hy+f}$. Donc on a $z = \frac{ax+by+c}{gx+hy+f}$: ou $zgx + zhy + zf = ax + by + c$; donc $zgx - ax = -zhy - fz + by + c$; donc $x = y\left\{-\frac{zh+b}{zg-a}\right\} + \frac{c-fz}{zg-a}$; donc enfin $x = y\varphi z + \Delta z$ qui eſt la formule du Problême. Donc la propoſée s'integrera par la même méthode que cette formule.

CL.

Application à une ſeconde formule.

PROBLÈME 2. Trouver les cas d'intégrabilité de l'équation $x^m y^n z^r = \varphi(x^q y^s z^t)$ dans laquelle $z = \frac{dx}{dy}$, m, n, r, q, s, t marquent des nombres quelconques.

SOLUTION. Je fais $x^q y^s z^t = u$,

donc . . . . . $x = u^{\frac{1}{q}} y^{-\frac{s}{q}} z^{-\frac{t}{q}}$

$x^m = u^{\frac{m}{q}} y^{-\frac{ms}{q}} z^{-\frac{mt}{q}}$;

mais nous avons $x^m y^n z^r = \varphi u$, donc $y^n z^r = \frac{\varphi u}{x^m}$;

donc $y^n z^r = \frac{\varphi u}{u^{\frac{m}{q}} y^{-\frac{ms}{q}} z^{-\frac{mt}{q}}} = (\varphi u) . u^{-\frac{m}{q}} y^{\frac{ms}{q}} z^{\frac{mt}{q}}$.

Donc $y^n = (\varphi u) . u^{-\frac{m}{q}} y^{\frac{ms}{q}} z^{\frac{tm-rq}{q}}$, ou $y^{\frac{nq-ms}{q}} = (\varphi u) u^{-\frac{m}{q}} z^{\frac{tm-rq}{q}}$. Donc enfin $y = (\varphi u)^{\frac{q}{nq-ms}} \times u^{\frac{-m}{nq-ms}} z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}}$. Donc $x = u^{\frac{1}{q}} z^{-\frac{t}{q}} y^{-\frac{s}{q}}$, (& en mettant pour $y^{-\frac{s}{q}}$ sa valeur,) $= (\varphi u)^{\frac{-s}{nq-ms}} \times u^{\frac{n}{nq-ms}} z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}$. Mais (Problême r.) $dx = z\,dy$. Donc si on substitue les valeurs de dx & de dy dans cette derniere équation, on trouvera les conditions d'intégrabilité de la maniere suivante.

Cas d'intégration de cette formule.

CLI.

Suppoſant $(\varphi u)^{\frac{q}{nq-ms}} . u^{-\frac{m}{nq-ms}} = V^t$, & $(\varphi u)^{\frac{-s}{nq-ms}} u^{\frac{n}{nq-ms}} = V$ pour abréger le calcul. Nous aurons $x = V z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}$, &

$y = V^t z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}}$.

Maniere de les trouver.

Donc à cauſe de l'équation $dx = z\,dy$, on a $d\left\{V z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}\right\} = z\,d\left\{V^t z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}}\right\}$, c'eſt-à-dire, $z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} dV + \left\{\frac{rs-nt}{nq-ms}\right\} V z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz = z^{\frac{nq-ms+tm-rq}{nq-ms}} dV^t + \left\{\frac{tm-rq}{nq-ms}\right\} V^t z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}} dz$, équation qui eſt intégrable dans tous les cas ſuivants.

CLII.

Premier cas d'intégration.

1°. Si $tm - rq = 0$. Car alors on a $z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} dV + \left\{\frac{rs-nt}{nq-ms}\right\} V z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz = z\,dV'$, équation qui eſt dans le cas de la Méthode du Chapitre VII.

De l'équation $tm - rq = 0$ on tire $\frac{t}{r} = \frac{q}{m}$, donc la propoſée devient $x^m z^r y^n = \varphi y^s x^{\frac{tm}{r}} z^{\frac{rq}{m}}$, & ſuppoſant $\frac{t}{r} = p$, on a $x^m z^r y^n = \varphi y^s x^{pm} z^{pr}$. Je fais $x^m z^r = k$, donc j'ai $k y^n = \varphi y^s k^p$, donc $k = \Delta y$; donc $x^m z^r = \Delta y$, équation facile à intégrer. La méthode que nous expliquons a l'avantage de fournir le moyen d'intégrer ces ſortes d'équations différentielles ſans chercher la valeur de $x^m z^r$ en y, ce qu'il ſeroit ſouvent impoſſible de trouver.

CLIII.

Second cas d'intégration de la même formule.

2. L'équation eſt intégrable dans le cas où $rs - nt = 0$. Car alors on a $V^{-1} dV = z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}+1} V'^{-1} dV' + \left\{\frac{tm-rq}{nq-ms}\right\} V'' z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}} dz$, équation encore conſtructible par la même méthode de M. Bernoulli, Chapitre VII.

L'équation $rs - nt = 0$ change la propoſée $x^m y^n z^r = \varphi x^q y^s z^s$, en la ſuivante $x^m y^n z^r = \varphi (x^q y^{\frac{nt}{r}} z^{\frac{rs}{n}})$, d'où l'on tirera $y^n z^r = Tx$, en ſuivant la même opération que ci-deſſus.

CLIV.

3°. Si $nq - ms + tm - rq = rs - nt$, alors l'équation ſera beaucoup plus ſimple que les précédentes. Car dans ce cas $\frac{tm-qr}{nq-ms} = \frac{nq-ms+tm-rq}{nq-ms} - 1 = \frac{rs-nt}{nq-ms} - 1$; donc notre derniere équation devient $z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} V^{-1} dV + \left\{\frac{rs-nt}{nq-ms}\right\} V z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz = z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} V''^{-1} dV'' + \left\{\frac{rs-nt}{nq-ms} - 1\right\} V'' z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz$, c'eſt-à-dire, $\frac{V^{-1} dV - V''^{-1} dV''}{\left\{\frac{rs-nt}{nq-ms} - 1\right\} V'' - \left\{\frac{rs-nt}{nq-ms}\right\} V} = \frac{z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz}{z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}}$, équation qui eſt toute ſéparée. Troiſieme cas d'intégration.

Si dans le cas préſent on fait $t = 0$, $r = 1$, au lieu de l'équation de condition $nq - ms + tm - rq = rs - nt$, on aura la ſuivante $nq - ms = q + s$. Dans ce cas la propoſée $x^m y^n z^r = \varphi x^q y^s z^t$ devient $x^m y^n z = \varphi x^q y^s$. Donc en mettant pour z ſa valeur $\frac{dx}{dy}$, on a $x^m y^n \frac{dx}{dy} = \varphi x^q y^s$, ou $dx = x^{-m} y^{-n} dy \varphi(x^q y^s)$; Donc en ſuppoſant . . . . . $-m = p$, $-n = t$ toute équation de cette forme $dx = x^p y^t dy \varphi(x^q y^s)$ ſera intégrable ſi $-tq + ps = q + s$; ainſi l'équation $dx = \frac{ax}{y} dy \varphi(y^s x^q)$ eſt intégrable. Car on a en comparant terme à terme $p = 1$, $t = -1$: donc on a $-tq + ps = q + s$. De même dans l'équation $dx = dy \varphi(xy^s)$, $p = 0$, $t = 0$, $q = 1$; donc, &c.

CLV.

Celui des équations homogenes y eſt compris.

Le cas des équations homogenes de M. Bernoulli eſt renfermé dans l'équation génerale $-tq+ps=q+s$. Car ce cas peut ſe repréſenter, comme nous l'avons déja dit (Art. CXLVII.) par $\frac{dx}{dy}=\varphi\frac{x}{y}$, ou $dx=dy\varphi xy^{-1}$. Or comparant cette équation avec la formule de l'article précédent, on a . . . . . $p=0$; $t=0$

$q=1$; $s=-1$.

Donc $ps-tq=0$, & $q+s=0$; donc $-tq+ps=q+s$.

CLVI.

Par le même moyen on peut déterminer les conditions d'intégrabilité de l'équation $dx=a'x^my^n\,dy+px^ey^h\,dy+fx^gy^l\,dy+$ &c. Pour y parvenir, je fais $x^by^a=u$ (a & b ſont deux indéterminées.) J'ai donc $x=u^{\frac{1}{b}}y^{-\frac{a}{b}}$; $dx=\frac{1}{b}y^{-\frac{a}{b}}u^{\frac{1}{b}-1}\,du-\frac{a}{b}u^{\frac{1}{b}}y^{-\frac{a}{b}-1}\,dy$; donc j'ai la transformée ſuivante $\frac{1}{b}y^{-\frac{a}{b}}u^{\frac{1}{b}-1}\,du=\frac{a}{b}u^{\frac{1}{b}}y^{-\frac{a}{b}-1}\,dy+a'u^{\frac{m}{b}}y^{-\frac{am}{b}+n}\,dy+pu^{\frac{e}{b}}y^{-\frac{ae}{b}+h}\,dy+fu^{\frac{g}{b}}y^{-\frac{ag}{b}+l}\,dy+$ &c. équation qu'on voit aiſément être intégrable, toutes les fois que $-\frac{a}{b}-1=-\frac{am}{b}+n=-\frac{ae}{b}+h=-\frac{ag}{b}+l$. Or de l'équation $-\frac{a}{b}-1=-\frac{am}{b}+n$, je tire $-\frac{a}{b}+\frac{ma}{b}=n+1$, donc $+\frac{a}{b}=\frac{n+1}{m-1}$; de même de l'équation $+\frac{a}{b}-1$

$= -\frac{ea}{b} + h$ on tire $-\frac{a}{b} + \frac{ea}{b} = h + 1$. Donc $\frac{a}{b} = \frac{h+1}{e-1}$ &c. Donc la proposée est intégrable, toutes les fois que $\frac{n+1}{m-1} = \frac{k+1}{e-1} = \frac{l+1}{g-1}$ &c.

CLVII.

4°. Enfin si $nq - ms = 0$, on a $x^m = u^{\frac{m}{q}} y^{-\frac{sm}{q}} z^{-\frac{tm}{q}}$. Donc la proposée $x^m y^n z^r = \varphi u$, devient $u^{\frac{m}{q}} y^{\frac{nq-ms}{q}} z^{\frac{rq-tm}{q}} = \varphi u$ ou $u^{\frac{m}{q}} z^{\frac{rq-tm}{q}} = \varphi u$, & l'équation proposée s'integre toutes les fois que $n = -m$, & $q = -s$, ce qui rentre dans le cas des équations homogenes.

Quatrieme & dernier cas d'intégration de la même formule.

CLVIII.

REMARQUE. On ne retrouvera que les mêmes équations de condition, soit qu'on tire de l'équation différentielle proposée les valeurs de y & de z, ou de x & de z.

CLIX.

PROBLEME 3. Trouver les conditions d'intégrabilité de l'équation $x = y^k z^r \varphi(y^p z^n) + \Delta(y^p z^n)$.

Recherche des cas d'intégration d'une troisieme formule.

1°. Je suppose $y^p z^n = u$, donc $z = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}}$; or $z = \frac{dx}{dy}$, donc $\frac{dx}{dy} = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}}$: donc $dx = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy$. On a aussi $z^r = u^{\frac{r}{n}} y^{-\frac{pr}{n}}$, donc $y^k z^r = u^{\frac{r}{n}} y^{k-\frac{pr}{n}}$, donc on a la transformée $x = u^{\frac{r}{n}} y^{k-\frac{pr}{n}} \varphi u + \Delta u$.

Nommant $u^{\frac{r}{n}} \varphi u$, V, j'ai $u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy = d(V y^{k-\frac{pr}{n}} + \Delta u)$, par où il m'eſt facile de voir que l'équation ſe rapporte au cas général de M. Bernoulli expliqué (Ch. VII.) ſi $-\frac{p}{n}+1 = k-\frac{pr}{n}$.

2°. Si on fait encore $y^p z^n = u$, & qu'on en tire $y = u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}}$, $dy = \frac{1}{p} u^{\frac{1}{p}-1} z^{-\frac{n}{p}} du - \frac{n}{p} z^{-\frac{n}{p}-1} u^{\frac{1}{p}} dz$: on aura $dx = z dy = \frac{1}{p} z^{-\frac{n}{p}+1} u^{\frac{1}{p}-1} du - \frac{n}{p} u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}} dz$. D'ailleurs $y^k z^r = u^{\frac{k}{p}} z^{-\frac{nk}{p}+r}$, donc $x = u^{\frac{k}{p}} z^{-\frac{nk}{p}+r} \varphi u + \Delta u$.

Je nomme $u^{\frac{k}{p}} \varphi u$, V': j'ai donc dx, ou $\frac{1}{p} z^{-\frac{n}{p}+1} u^{\frac{1}{p}-1} du - \frac{n}{p} u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}} dz = z^{-\frac{nk}{p}+r} dV' - \left\{\frac{nk}{p} - r\right\} V' z^{-\frac{nk}{p}+r-1} dz + d(\Delta u)$. Or ſi $-\frac{n}{p}+1 = -\frac{nk}{p}+r$, on aura $-\frac{n}{p} = -\frac{nk}{p}+r-1$; donc l'équation précédente devient $\frac{1}{p} z^{-\frac{n}{p}+1} u^{\frac{1}{p}-1} du - z^{-\frac{n}{p}+1} V'^{-1} dV' - d\Delta u = \frac{n}{p} z^{-\frac{n}{p}} u^{\frac{1}{p}} dz - \left\{\frac{n}{p} - 1\right\} V' z^{-\frac{n}{p}} dz$, ou bien $z^{-\frac{n}{p}} dz \times \frac{n}{p} u^{\frac{1}{p}} + \left\{1 - \frac{n}{p}\right\} V' + z^{-\frac{n}{p}+1} du \times \left\{V'^{-1} \frac{dV'}{du} - \frac{1}{p} u^{\frac{1}{p}-1}\right\} - d\Delta u = 0$. Or on voit bien que cette équation ſe rapporte au cas général de M. Bernoulli, de même que l'équation de l'article précédent.

CLX.

CLX.

COROLLAIRE. Si la proposée étoit $x = y^k z^r \varphi(y^p z^n) + y^{k'} z^{r'} \Delta(y^p z^n) + y^{k''} z^{r''} \Gamma(y^p z^n) +$ &c. je ferois comme ci-dessus $y^p z^n = u$, donc $z = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}}$, donc $dx = z\,dy = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy$. Donc $u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy = d(u^{\frac{r}{n}} y^{-\frac{pr}{n}+k} \varphi u + u^{\frac{r'}{n}} y^{-\frac{pr'}{n}+k'} \Delta u + u^{\frac{r''}{n}} y^{-\frac{pr''}{n}+k''} \Gamma u +$ &c.) Donc la proposée sera intégrable, lorsqu'on aura $-\frac{p}{n}+1 = -\frac{pr}{n}+k = -\frac{pr'}{n}+k' = -\frac{pr''}{n}+k''$, ou en faisant le même calcul que dans l'Article CLIX. lorsqu'on aura $\frac{p}{n} = \frac{k-1}{r-1} = \frac{k'-1}{r'-1} = \frac{k''-1}{r''-1}$ &c. ou bien lorsque k' & r', ou k'' & r'' &c. sont égaux à zéro.

CLXI.

REMARQUE. Toutes les méthodes que nous avons expliquées dans ce Chapitre pour les équations différentielles à deux variables du premier ordre, s'étendent aussi à celles d'un genre plus élevé. C'est ce que nous ferons voir dans la suite.

CLXII.

SCHOLIE GÉNÉRALE. La méthode dont nous avons donné un essai (Art. CXLVIII.) peut s'étendre à toutes les équations dans lesquelles faisant $y^p z^q = k$, on a une équation entre x & k. En effet on commencera par construire l'équation entre x & k, puis on observera que $y^{\frac{p}{q}} z =$

$k^{\frac{1}{q}}$, ou en mettant pour z ſa valeur $\frac{dx}{dy}$, que $y^{\frac{p}{q}} dx = k^{\frac{1}{q}} dy$, ou bien $k^{-\frac{1}{q}} dx = y^{-\frac{p}{q}} dy$. Or il eſt évident que pour chaque x on a une valeur de k; donc on aura auſſi pour chaque x une valeur de y correſpondante.

CHAPITRE XIV.

Autre Méthode pour découvrir quelques équations intégrables par le moyen de l'équation $z = \frac{dx}{dy}$.

CLXIII.

Procédé de cette Méthode.

LA Méthode que nous allons expliquer ici conſiſte à préparer l'équation $dx = z\,dy$, ou $dx - z\,dy = 0$ de telle façon qu'on la puiſſe diviſer en deux parties, dont l'une ſoit intégrable, & dont l'autre ſoit ou puiſſe devenir une différentielle exacte multipliée par une quantité quelconque. Enſuite on multipliera la premiere partie par une fonction de ſon intégrale, & on ſuppoſera que le produit de cette fonction par la quantité qui multiplie la différentielle dans la ſeconde partie ſoit égal à une fonction de l'intégrale de la différentielle contenue dans cette ſeconde partie. On aura par ce moyen une équation de condition qui rend la propoſée intégrable.

CLXIV.

Application de cette Méthode.

Je mets l'équation $dx - zdy = 0$ ſous la forme ſuivante $dx - zdy - ydz + ydz = 0$: je multiplie cette derniere équation par une fonction X de x, & j'y ajoute $zydX - zydX$, ce qui ne la change pas ; j'aurai $Xdx - Xzdy - Xydz - zydX + yXdz + zydX = 0$, ou bien $Xdx - Xzdy - Xydz - zydX = -yXdz - zydX$. Or le premier membre de cette équation eſt intégrable ; ſon intégrale eſt $\int Xdx - yzX$. Le ſecond membre eſt la différentielle de $-zX$, multipliée par y. En ſuivant donc le procédé qu'indique notre méthode, je multiplie le premier membre $Xdx - Xzdy - Xydz - yzdX$ par une fonction de ſon intégrale, & je ſuppoſe que le produit de cette fonction, par la quantité y qui multiplie la différentielle dans le ſecond membre, eſt égal à une fonction de zX. De cette hypotheſe je tire le Théorême ſuivant.

CLXV.

THÉOREME. L'équation propoſée eſt intégrable ſi $y\varphi(\int Xdx - Xyz) = \Gamma zX$.

Car en pratiquant les opérations indiquées ci-deſſus, la propoſée devient $\{Xdx - d(Xyz)\} \times \varphi(\int Xdx - Xyz) = -d(Xz) \times y\varphi(\int Xdx - Xyz)$ qui ſe change par la ſuppoſition précédente en $\{Xdx - d(Xyz)\} \times \varphi(\int Xdx - Xyz) = -d(Xz) \cdot \Gamma(Xz)$, équation qu'on voit bien être intégrable.

CLXVI.

On peut encore exprimer ce Théorême de la façon ſuivante : l'équation $Xdx - d(Xyz) = -yd(Xz)$ eſt intégrable, ſi $\int Xdx - Xyz$ eſt égale à une fonction de $y\Delta(Xz)$.

Car de ce que $\int Xdx - Xyz = \varphi y\Delta(Xz)$, il s'enſuit que $y\Delta(Xz) = \Gamma(\int Xdx - Xyz)$: donc $\frac{1}{\Gamma(\int Xdx - Xyz)} = \frac{1}{y\Delta(Xz)}$: donc en multipliant les deux membres de notre équation par ces deux quantités égales, on aura $\frac{Xdx - d(Xyz)}{\Gamma(\int Xdx - Xyz)} = \frac{-d(Xz)}{\Delta(Xz)}$, équation intégrable.

CLXVII.

Premier exemple.

COROLLAIRE. Donc l'équation $\int Xdx = pyXz + qyX^n z^n + a$ eſt intégrable, p, q & a ſont des conſtantes. En effet il eſt évident que cette équation peut ſe mettre ſous la forme ſuivante $\int Xdx - yzX = pyzX - yzX + qyX^n z^n + a$, ou $\int Xdx - yzX = y.(pXz - Xz + qX^n z^n) + a = y\Delta(Xz) + a$.

Maintenant on voit que pour intégrer cette équation, il ne s'agit que de conſtruire une courbe dont les coordonnées ſoient x & y. Soit . . . . $Xz = r$

$$\int Xdx - yr = k$$

$$k = u + a,$$

on aura . . . . . $k - a = y\Delta r$,

& par conſéquent. . . . . $y\Delta r = u$.

La ſuppoſition de $k = u + a$ nous donne $dk = du$. Mais ſuivant le Théorême précédent on a dans ce cas-ci $X dx - d(Xyz) + y d(Xz) = 0$: donc on aura $dk + y dr = 0$, & $du + y dr = 0$: donc enfin en mettant pour y ſa valeur $\frac{u}{\Delta r}$, il nous vient $\frac{du}{u} + \frac{dr}{\Delta r} = 0$, équation facile à conſtruire & qui nous donne la valeur de y en u ou en r. y étant ainſi trouvée, cherchons x. Les ſuppoſitions précédentes nous donnent $\int X dx - yr = u + a$. Soit $u + yr + a = t$, on aura $\int X dx = t$. Je conſtruis une courbe BM, dans laquelle $PM = X$ Figure 7.

$AP = x$,

l'aire de cette courbe ou $ABMP$ ſera $= \int X dx = t$. Je prends AB pour l'unité, & je ſuppoſe $PQ = \frac{PMBA}{AB} = \int \frac{X dx}{1} = t$, QR ſera l'x cherchée.

CLXVIII.

Soit propoſée l'équation $x + Z + a = \frac{yyz dz}{2 dZ} + \frac{z dZ}{2 dz}$, a eſt une conſtante, & Z une fonction de z, c'eſt-à-dire de $\frac{dx}{dy}$. Second exemple.

Je commence par donner à cette équation la forme ſuivante $x - yz + Z + a = \frac{z dz}{2 dZ} \times \left(y - \frac{dZ}{dz}\right)^2$ qu'on voit clairement être la même équation que la propoſée. Donc en prenant la racine quarrée des deux membres, on aura $\sqrt{(x - yz + Z + a)} = \left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\} \sqrt{\frac{z dz}{2 dZ}}$. Mais par l'hypotheſe $z = \frac{dx}{dy}$, donc $dx - z dy = 0$, & par conſéquent $dx - z dy - y dz + dZ + y dz =$

$dZ = 0$; donc $\frac{dx - zdy - ydz + dZ}{\sqrt{(x - yz + Z + a)}} = \frac{-ydz + dZ}{\left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\}\sqrt{\frac{zdz}{zdz}}}$ $= \frac{-dz.\left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\}}{\left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\}\sqrt{\frac{zdz}{zdZ}}}$; donc enfin $\frac{dx - zdy - ydz + dZ}{\sqrt{(x - yz + Z + a)}}$ $= \frac{-dz}{\sqrt{\left\{\frac{zdz}{zdZ}\right\}}}$. J'ai donc en intégrant $\sqrt{(x - yz + Z + a)} = \frac{1}{2}\int \frac{-dz}{\sqrt{\frac{zdz}{zdZ}}}$. Si on combine cette équation avec la propoſée, on en tirera la valeur de x ou de y en z, ce qui donne le Théorême ſuivant.

CLXIX.

THÉOREME. Toutes les équations dans leſquelles $x - yz + Z + a = \varphi\left\{(y - \frac{dZ}{dz}) \Gamma z\right\}$, ſont intégrables.

DÉMONSTRATION. Puiſque $x - yz + Z + a = \varphi\left\{(y - \frac{dZ}{dz}).\Gamma z\right\}$, on aura $\varphi'(x - yz + Z + a) = \left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\} \times \Gamma z$; & diviſant par $\varphi'(x - yz + Z + a)$ l'équation $dx - zdy - ydz + dZ = -(ydz - dZ)$, on aura $\frac{dx - zdy - ydz + dZ}{\varphi'(x - yz + Z + a)} = \frac{-(ydz - dZ)}{\varphi'(x - yz + Z + a)} = \frac{-dz.\left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\}}{\left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\}.\Gamma z} = dz\Delta z$; équation dont on voit aiſément que chaque membre eſt intégrable.

CLXX.

REMARQUE. On peut au lieu de $dx - zdy = 0$, mettre $dy - \frac{dx}{z} = 0$: alors il faudra ſubſtituer y à x,

x à y, $\frac{1}{z}$ à z dans les équations de condition, ce qui en donnera de nouvelles.

CHAPITRE XV.

Méthode pour intégrer quelques équations différentielles par le moyen des coefficients indéterminés.

CLXXI.

CEtte Méthode eſt utile lorſqu'on a une, deux, trois, quatre, &c. équations à intégrer enſemble, ou lorſqu'on peut regarder une équation différentielle donnée, comme étant formée de pluſieurs autres équations. En général on integre par ſon moyen un nombre quelconque p d'équations différentielles, qui contiennent un nombre $p+1$ de variables t, x, y, z, u, &c. dont la premiere ait ſa différence dt conſtante, & dont les autres x, y, z, u, &c. & leurs différences ne ſont ni mêlées entre elles ni avec x, & y, &c. ni élevées à aucune puiſſance autre que l'unité, mais ſont ſeulement multipliées par des puiſſances convenables de dt. L'intégration n'auroit même aucune difficulté de plus, ſi dans chacune de ces équations il y avoit un terme quelconque compoſé comme on voudroit de t, de dt & de conſtantes.

Cas dans leſquels on peut ſe ſervir de cette Méthode.

Voici le procédé que nous fait ſuivre cette méthode.

*

CLXXII.

En quoi elle consiste.

On multiplie par un coefficient indéterminé la seconde des deux équations propoſées, lorſqu'il n'y en a que deux; ſi on en a trois, on multiplie auſſi la troiſieme par une indéterminée différente de celle qui multiplie la ſeconde, & ainſi de ſuite. Après cette premiere opération, on ajoute ces équations les unes aux autres, on détermine les valeurs des coefficients indéterminés, & par leur moyen auſſi celles de t, x, y, &c.

Avant d'appliquer cette méthode à des exemples, nous établirons une propoſition qui nous eſt néceſſaire pour la ſuite.

CLXXIII.

Lemme préparatoire.

LEMME. Si l'on a une fonction $\varphi(z+\xi)$, telle que la variable z croiſſe ou décroiſſe d'une quantité très-petite ξ, je dis qu'on aura $\varphi(z+\xi) = \varphi z + \xi \Delta z + \frac{\xi^2 \Gamma z}{2} + \frac{\xi^3 \downarrow z}{2.3.} +$ &c. On ſuppoſe ici que $d(\varphi z) = dz\,\Delta z$, que $d(\Delta z) = dz\,\Gamma z$, que $d(\Gamma z) = dz \downarrow z$; & ainſi de ſuite.

DÉMONST. Soit $\varphi(z+\xi) = \varphi z + u$: je différentie cette équation en traitant z comme conſtante, ξ & u comme variables ; j'aurai $d\xi\,\Delta(z+\xi) = du$: donc $u = \int d\xi\,\Delta(z+\xi)$: donc $\varphi(z+\xi) = \varphi z + \int d\xi\,\Delta(z+\xi)$. Soit maintenant $\Delta(z+\xi) = \Delta z + y$, j'aurai en regardant z comme conſtante & ξ & y comme variables $y = \int d\xi\,\Gamma(z+\xi)$: donc $\varphi(z+\xi) = \varphi z + \int d\xi\,\Delta z + \int d\xi \int d\xi\,\Gamma(z+\xi)$. Soit encore $\Gamma(z+\xi) = \Gamma z + t$, j'aurai

j'aurai en supposant toujours z constante, ξ & t variables, $t = \int d\xi \downarrow (z+\xi)$; donc en substituant pour t cette valeur, on a $\Gamma(z+\xi) = \Gamma z + \int d\xi \downarrow (z+\xi)$, & par conséquent $\varphi(z+\xi) = \varphi z + \int d\xi \Delta z + \int d\xi \int d\xi \Gamma z + \int d\xi \int d\xi \int d\xi \downarrow z +$ &c. on trouveroit une suite de termes à l'infini. Donc (Art. CCXVIII. 1ere Partie) $\varphi(z+\xi) = \varphi z + \xi \Delta z + \frac{\xi^2 \Gamma z}{2} + \frac{\xi^3 \downarrow z}{2.3} +$ &c.

CLXXIV.

COROLLAIRE. On trouvera par la même méthode que $c^{fx+\alpha x} = c^{fx} + \alpha x c^{fx} + \frac{\alpha\alpha x^2 c^{fx}}{2} + \frac{\alpha^3 x^3 \delta f x}{2.3} +$ &c. Car soit $c^{fx+\alpha x} = c^{fx} + t$, & soit x constante, α & t variables, on aura $c^{fx+\alpha x} x\, d\alpha = dt$, donc $t = \int c^{fx+\alpha x} x\, d\alpha$ & $c^{fx+\alpha x} = c^{fx} + \int c^{fx+\alpha x} x\, d\alpha$. Donc on aura une suite telle que $c^{fx+\alpha x} = c^{fx} + \int dx \alpha c^{fx} + \int x\, d\alpha c^{fx} \int x\, d\alpha c^{fx} + \int x\, d\alpha c^{fx} \int x\, d\alpha c^{fx} \int x\, d\alpha c^{fx} +$ &c. Donc en intégrant on a $c^{fx+\alpha x} = c^{fx} + \alpha x c^{fx} + \frac{\alpha\alpha x x c^{fx}}{2} + \frac{\alpha^3 x^3 c^{fx}}{2.3.} +$ &c.

Passons maintenant à l'application de notre méthode à des exemples.

CLXXV.

PROBLEME 1. Trouver l'intégrale des deux équations

$$dx + (Cx + Dy)\, dt = 0$$
$$dy + (Kx + Ly)\, dt = 0.$$

Application de la méthode aux cas où l'on a deux équations.

SOLUTION. Suivant ce que nous avons dit, je multiplie la seconde de ces deux équations par un coefficient

indéterminé v, elle devient

$$v\,dy + (Kx + Ly)\,v\,dt = 0;$$

j'ajoute cette équation à la premiere, ce qui me donne l'équation ſuivante

$$(A)\ dx + v\,dy + \{(C + Kv)x + (D + Lv)y\}\,dt = 0;$$

à préſent je fais en ſorte que $(C + Kv)x + (D + Lv)y$ ſoit un multiple de $x + vy$. J'aurai donc

$$Cx + Kvx + Dy + Lvy = Rx + Rvy,$$

(R eſt un coefficient conſtant quelconque.) Donc en comparant terme à terme les deux membres de cette équation, j'ai $C + Kv = R$, & $D + Lv = Rv$, ou $\frac{D+Lv}{v} = R$. Donc $C + Kv = \frac{D+Lv}{v}$: donc $Cv + Kvv = D + Lv$, ou bien $Kvv + Cv - Lv = D$, ou $vv + \frac{Cv}{K} - \frac{Lv}{K} = \frac{D}{K}$: donc $vv + \frac{Cv-Lv}{K} + \frac{CC}{4KK} - \frac{CL}{2KK} + \frac{LL}{4KK} = \frac{D}{K} + \frac{CC}{4KK} - \frac{CL}{2KK} + \frac{LL}{4KK}$: donc en prenant la racine quarrée $v = \frac{-C+L}{2K} \pm \frac{\sqrt{(4DK + CC - 2CL + LL)}}{2K}$: donc enfin $(B)\ v = \frac{-C+L}{2K} \pm \frac{\sqrt{(L-C)^2 + 4DK}}{2K}$.

Je ſuppoſe à préſent . . . . . $x + vy = u$

j'ai . . . . . $dx + v\,dy = du$.

D'ailleurs l'équation $C + Kv = \frac{D+Lv}{v}$ donne $D + Lv = (C + Kv).v$. Donc $(C + Kv)x + (D + Lv)y = (C + Kv)x + (C + Kv)vy = (C + Kv).(x + vy) = (C + Kv)u$. Donc l'équation (A) $dx + v\,dy + \{(C + Kv)x + (D + Lv)y\}\,dt = 0$ devient, en faiſant les ſubſtitutions précédentes,

$$du + (C + Kv)\,u\,dt = 0$$

ou . . . . . $\frac{du}{u} = (C + Kv)\,x - dt$

équation dont l'intégrale eſt, comme on le ſait,

$$lu = (C + Kv)\,x - t,$$

ou en prenant e pour le nombre dont le logarithme eſt l'unité, & g pour la conſtante, $lu = lge^{-(C+Kv)t}$

ou bien . . . . . $u = ge^{-(C+Kv)t}$

Soient maintenant p, p' les deux valeurs de v trouvées par l'équation (B), au lieu de l'équation $x + vy = u$, on aura ces deux-ci . . . . . $(C)\ x + py = u$

$$(D)\ x + p'y = u';$$

& de même au lieu de l'équation $u = ge^{-(C+Kv)t}$ on aura les deux ſuivantes . . . . $u = ge^{-(C+Kp)t}$

$$u' = g'e^{-(C+Kp')t}.$$

Des deux équations (C) & (D), je tire aiſément les valeurs de x & de y. Car retranchant l'équation $x + p'y = u'$ de l'équation $x + py = u$, j'ai $py - p'y = u - u'$: Donc . . . . . $y = \frac{u - u'}{p - p'}$.

Pour avoir maintenant la valeur de x, je multiplie par p' l'équation . . . . . $x + py = u$,

& par p l'équation . . . . $x + p'y = u'$,

ce qui me donne . . . $p'x + p'py = p'u$

& . . . . . $px + pp'y = pu'$;

je retranche la ſeconde de la premiere, j'ai

$$p'x + p'py - px - pp'y = p'u - pu',$$

donc . . . . . $p'x - px = p'u - pu'$.

Donc . . . . . $x = \frac{p'u - pu'}{p' - p}$.

On mettra dans ces valeurs de x & de y pour u & pour u' leurs valeurs $ge^{-(C+Kp)t}$ & $g'e^{-(C+Kp')t}$; on déterminera les constantes g & g' en supposant $t=0$ ou une grandeur connue, & on aura l'intégrale cherchée.

CLXXVI.

Observations nécessaires sur la solution précédente.

REMARQUE 1. Si les valeurs de v sont imaginaires, l'intégration se fera toujours de même. Car nous avons démontré dans l'Introduction que les exponentielles imaginaires se réduisent toujours à $A+B'\sqrt{-1}$, $A-B'\sqrt{-1}$, A & B étant des quantités réelles. Si les valeurs de x & de y devoient être réelles, les imaginaires en disparoîtroient.

CLXXVII.

REMARQUE 2. Si v n'avoit pas deux valeurs, le Problême n'auroit pas plus de difficulté, au contraire il se résoudroit beaucoup plus aisément. Car v ne peut avoir moins de deux valeurs qu'en supposant $K=0$, ou $D=0$; l'inconnue v n'étant plus qu'à la premiere puissance dans le premier cas, & dans le second l'équation entiere pouvant se diviser exactement par v est du premier degré. Or dans ces deux cas une des deux équations est intégrable, & l'autre se réduit à la formule de M. Bernoulli, traitée dans le Chapitre VII.

Supposons $D=0$, la premiere équation devient

$$dx+Cx\,dt=0.$$

Donc . . . . . $\frac{dx}{x}=-C\,dt$,

donc . . . . . $lx = -Ct$,

ou en prenant e pour le nombre dont le logarithme eſt l'unité, & m pour la conſtante, on a $x = me^{-Ct}$.

La ſeconde équation eſt $dy + Ly\,dt + Kx\,dt = 0$: mettant dans cette équation pour x ſa valeur en t tirée de l'équation précédente, on voit clairement qu'elle eſt de la forme ſuivante $dy + Ay\,dt + T\,dt = 0$, équation dans laquelle A eſt une conſtante & T une fonction de t & de conſtantes. Donc elle s'intégre par la méthode de M. Bernoulli.

Ce ſera la même choſe, ſi on ſuppoſe $K = 0$, comme il eſt facile de s'en aſſurer.

CLXXVIII.

REMARQUE. Si les deux valeurs de v ſont égales, on prendra arbitrairement une de ces deux valeurs, & après avoir réſolu l'équation $du = -dt\,(C + Kv)\,u$, on tirera de l'équation $x + vy = u$, une valeur de x ou de y en u. Par exemple, je prends ici p pour la valeur de v. J'ai conſéquemment $u = ge^{-(C+Kp)t}$. Mettant cette valeur de u dans l'équation $x + vy = u$, elle devient $x = ge^{-(C+Kp)t} - py$. Je mets enſuite cette valeur de x dans l'équation $dy + (Kx + Ly)\,dt = 0$, j'ai $dy + Kge^{-(C+Kp)t}\,dt - Kpy\,dt + Ly\,dt = 0$, ou $dy + (L - Kp)\,y\,dt + Kge^{-(C+Kp)t}\,dt = 0$ équation qui s'integre aiſément, comme on le voit, par le moyen de la formule $dz + bz\,dt + T\,dt = 0$. Cette

équation intégrée nous donnera la valeur de y en t. On aura donc les valeurs de x & de y en t.

CLXXIX.

Cas dans lequel on peut résoudre autrement le Problème.

REMARQUE 4. Nous venons de voir dans la Remarque précédente que le Problême ſe réſout très-facilement, lorſque v n'a pas deux valeurs inégales : dans ce même cas on pourroit encore trouver les valeurs de x & de y par des méthodes différentes de celles que nous venons d'employer pour cela.

Soit 1°. $D=0$ dans l'équation $v=\frac{-C+L}{2K}\pm\frac{\sqrt{(L-C)^2+4DK}}{2K}$ devient 1°. $v=\frac{-C+L+L-C}{2K}$, ou $\frac{L-C}{K}$; 2°. $v=\frac{0}{2K}$. Donc en ſuppoſant dans les formules précédentes $p'=0$, on aura les valeurs de x & de y.

2°. Si $K=0$, au lieu de le ſuppoſer abſolument nul, je le regarde comme infiniment petit, ce qui revient au même. Je reprends l'équation $v=\frac{-C+L}{2K}\pm\frac{\sqrt{(L-C)^2+4DK}}{2K}$, je la mets ſous la forme ſuivante $v=\frac{L-C}{2K}\pm\sqrt{\frac{LL-2CL+CC}{4K^2}+\frac{D}{K}}$. Enſuite pour avoir les deux valeurs de v, je prends la racine quarrée de $\sqrt{\frac{LL-2CL+CC}{4K^2}+\frac{D}{K}}$, & je trouve que cette racine eſt $\frac{C-L}{2K}+\frac{D}{C-L}+$ un terme que je puis négliger parce qu'il eſt infiniment petit par rapport aux autres. On a donc $v=\frac{-C+L}{2K}\pm\left\{\frac{C-L}{2K}+\frac{D}{C-L}\right\}$. Prenant l'équation en $+$ j'ai $v=\frac{L-C}{2K}+\frac{C-L}{2K}+\frac{D}{C-L}$, c'eſt-à-dire,

$v = \frac{D}{C-L}$. La prenant en moins je trouve $v = \frac{L-C}{2K} - \frac{C-L}{2K} - \frac{D}{C-L}$. Or les deux premiers termes de cette valeur étant infinis, je puis négliger le troiſieme. J'aurai donc pour ſeconde valeur de v, $v = \frac{L-C}{K}$.

On aura donc $u = ge^{-Ct}$; $u' = g'e^{-Lt}$; $y = K\left\{\frac{u-u'}{C-L}\right\}$; $x = u - \frac{pu'}{p'} = u + \frac{DKu'}{(C-L)^2}$.

3°. Si les valeurs de p & de p' ſont égales, je ſuppoſerai $p = a + \alpha$, $p' = a - \alpha$ (α eſt une quantité infiniment petite.) J'ai donc $u = ge^{-(C+K\alpha+Ka)t}$. Or α étant une quantité infiniment petite peut être regardée comme une différentielle. Mais nous avons vu (Art. CLXXIV.) que ſi on avoit C^{x+dx}, on pouvoit lui donner la forme ſuivante $C^x + C^x\,dx$. Donc on aura par la même raiſon $u = ge^{-(C+Ka)t} - Kg\alpha te^{-(C+Ka)t}$. On trouvera de même $u' = g'e^{-(C+Ka)t} + Kg\alpha te^{-(C+Ka)t}$. On aura auſſi $y = \frac{u-u'}{2\alpha}$; $x = \frac{au-\alpha u-au'-\alpha u'}{2\alpha}$. Donc en mettant pour u & u' leurs valeurs, & ſuppoſant $g = g'$, on a $y = -Kgte^{-(C+Ka)t}$, & $x = -Kgte^{-(C+Ka)t}$.

CLXXX.

COROLLAIRE. Le Problême s'étendra très-facilement à deux équations qui contiendront deux indéterminées x & y multipliées par des conſtantes & par une fonction quelconque de t, avec leurs différences auſſi multipliées par des conſtantes & par une fonction de t, & de plus un terme $t\,dt$, $\theta\,dt$ qui ne renferme que des

conſtantes avec t. Car ces cas ſe rameneront d'eux-mêmes à la formule $dz + bz\,dt + T\,dt = 0$.

CLXXXI.

Application de la méthode au cas où l'on a trois équations.

PROBLEME 2. Intégrer les équations

$$dx + (ax + by + cz)\,dt = 0$$
$$dy + (ex + fy + gz)\,dt = 0$$
$$dz + (hx + my + nz)\,dt = 0.$$

SOLUTION. Suivant ce que nous avons dit (Art. CLXXII.) je multiplie la ſeconde de ces équations par un coefficient indéterminé v, & la troiſieme par un autre coefficient indéterminé μ. Les trois équations précédentes deviennent alors,

$$dx + (ax + by + cz)\,dt = 0$$
$$v\,dy + (evx + fvy + gvz)\,dt = 0$$
$$\mu\,dz + (h\mu x + m\mu y + n\mu z)\,dt = 0.$$

Je les ajoute enſemble, ce qui me donne (A) $dx + v\,dy + \mu\,dz + \{(a + ev + h\mu)x + (b + fv + m\mu)y + (c + gv + n\mu)z\}\,dt = 0$. Je fais enſorte à préſent que la quantité qui multiplie dt dans cette équation ſoit un facteur de $x + vy + \mu z$. J'aurai donc en ſuppoſant R un coefficient conſtant, j'aurai $ax + evx + h\mu x + by + fvy + m\mu y + cz + gvz + n\mu z = Rx + Rvy + R\mu z$. Donc en comparant terme à terme les deux membres de cette équation, j'ai $a + ev + h\mu = R$, $b + fv + m\mu = Rv$, $c + gv + n\mu = R\mu$. Donc $a + ev + h\mu = \frac{b + fv + m\mu}{v} = \frac{c + gv + \mu n}{\mu}$. Donc $(a + ev + h\mu)v =$

$h\mu)v = b + fv + m\mu$ & $(a + ev + h\mu)\mu = c + gv + n\mu$. Donc l'équation (A) devient (F) $dx + v\,dy + \mu\,dz + dt \times (x + vy + \mu z) \times (a + ev + h\mu) = 0$. Soit à préſent $x + vy + \mu z = u$, donc $dx + v\,dy + \mu\,dz = du$, donc l'équation (F) ſe change en la ſuivante $du + (a + ev + h\mu)u\,dt = 0$, ou $\frac{du}{u} = -(a + ev + h\mu)\,dt$, ou $lu = -(a + ev + h\mu)t$: Donc en prenant E pour le nombre dont le logarithme eſt l'unité & g pour la conſtante, on a $lu = lgE^{-(a+ev+h\mu)t}$; ou enfin $u = gE^{-(a+ev+h\mu)t}$.

A préſent l'équation $av + evv + h\mu v = b + fv + m\mu$ donne la valeur de μ en v; mettant cette valeur de μ dans l'équation $(a + ev + h\mu)\mu = c + gv + n\mu$, on aura, après avoir effacé ce qui ſe détruit & fait les réductions ordinaires, une équation du troiſieme degré qui donnera trois valeurs de v.

Soient p, p', p'' les trois valeurs de v, & m, m', m'' les trois valeurs correſpondantes de μ. J'aurai au lieu de l'équation $u = gE^{-(a+ev+h\mu)t}$, ces trois autres équations,

$$u = gE^{-(a+ep+hm)t}$$
$$u' = g'E^{-(a+ep'+hm')t}$$
$$u'' = g''E^{-(a+ep''+hm'')t};$$

& au lieu de l'équation $x + vy + \mu z = u$, les trois ſuivantes,

$$x + py + mz = gE^{-(a+ep+hm)t}$$
$$x + p'y + m'z = g'E^{-(a+ep'+hm')t}$$
$$x + p''y + m''z = g''E^{-(a+ep''+hm'')t}.$$

De ces trois équations on tirera les valeurs de x, y, z,

& on déterminera les conſtantes g, g', g'' par les valeurs que doivent avoir x, y, z, lorſque $t = 0$ ou une conſtante donnée.

CLXXXII.

REMARQUE. On peut toujours ſuppoſer que les trois valeurs de v ſont inégales. Pour cela il ſuffit d'augmenter un des coefficients a, b, c, &c. d'une quantité α infiniment petite ; alors on aura des valeurs de v toutes différentes entre elles, & dans leſquelles entrera la quantité α. Ces valeurs étant ſubſtituées à la place de p, p', p'', on trouvera celles de x, y, z, dans leſquelles n'entre plus α. Pour avoir ces valeurs de v, on ſe ſervira du parallelograme de M. Newton. Au reſte, il eſt indifférent que quelques-unes de ces valeurs ſoient imaginaires, pourvu qu'elles ſoient inégales entre elles.

CLXXXIII.

Ce qu'il faut faire ſi on avoit quatre équations.

COROLLAIRE. Si on a quatre équations, on multipliera auſſi la quatrieme par une nouvelle indéterminée π : Après avoir trouvé l'équation en v, & celle qui donne la valeur de μ en v, on mettra dans cette derniere π au lieu de μ, & au lieu de h, m, n, les coefficients qui leur répondent dans la quatrieme équation, & réciproquement h, m, n au lieu de ces coefficients. Après quoi on réſoudroit le Problême par la Méthode ſemblable à celle de l'Article CLXXXI.

Si on avoit cinq, six, &c. équations, on voit à présent comment il faudroit s'y prendre pour les résoudre.

CHAPITRE XVI.

Méthode pour déterminer une intégrale par certaines conditions données de la différentielle.

CLXXXIV.

PROBLEME I. ETant données deux quantités différentielles telles que . . . . . $\begin{matrix} \alpha dt + v ds \\ v dt + \alpha ds \end{matrix}$ qui sont l'une & l'autre des différentielles exactes de quelque fonction de $t+s$; trouver α & v, & par conséquent l'intégration des deux différentielles proposées. Premier exemple.

SOLUTION. 1°. J'ajoute ensemble les deux différentielles proposées, ce qui me donnera $(\alpha+v)\,dt + (\alpha+v)\,ds$, qui est encore une différentielle exacte de quelque fonction de $t+s$; on a donc $(\alpha+v).(dt+ds)$. D'où il suit que $\alpha+v$ est égale à une fonction de $t+s$.

2°. Je retranche l'une de l'autre nos deux différentielles, j'ai $(\alpha-v)\,dt - (\alpha-v)\,ds$, ou $(\alpha-v).(dt-ds)$: d'où je conclus que $\alpha-v$ est égale à une fonction de $t-s$.

J'aurai donc $\alpha+v+\alpha-v = \varphi(t+s) + \Delta(t-s)$. Donc $\alpha = \frac{\varphi(t+s)+\Delta(t-s)}{2}$.

J'aurai encore $\alpha+v-\alpha+v = \varphi(t+s) - \Delta(t-s)$;

donc $v = \frac{\varphi(t+s) - \Delta(t-s)}{2}$.

CLXXXV.

Second exemple.

PROBLEME 2. Etant données les deux différentielles exactes . . . . . $vdt + \epsilon ds$

$vds + \epsilon ndt$,

déterminer v & ϵ, & par conſéquent l'intégrale.

SOLUTION. Je mets la ſeconde de nos deux différentielles ſous la forme ſuivante

$$\epsilon\sqrt{n} \times dt\sqrt{n} + vds.$$

Je multiplie la premiere par $\sqrt{n}$, ce qui ne l'empêche pas d'être une différentielle exacte, elle devient

$$vdt\sqrt{n} + \epsilon ds\sqrt{n}.$$

Maintenant 1°. j'ajoute enſemble ces deux différentielles, j'ai . . . $(dt\sqrt{n} + ds).(\epsilon\sqrt{n} + v)$

2°. Je les retranche l'une de l'autre, j'aurai

$$(dt\sqrt{n} - ds).(\epsilon\sqrt{n} - v).$$

De là je conclus que $\epsilon\sqrt{n} + v$ eſt une fonction de $t\sqrt{n} + s$, & $\epsilon\sqrt{n} - v$ une fonction de $t\sqrt{n} - s$. Donc $\epsilon\sqrt{n} + v + \epsilon\sqrt{n} - v = \varphi(t\sqrt{n} + s) + \Delta(t\sqrt{n} - s)$. Donc $\epsilon = \frac{\varphi(t\sqrt{n}+s) + \Delta(t\sqrt{n}-s)}{2\sqrt{n}}$; donc $\epsilon n = \frac{[\varphi(t\sqrt{n}+s) + \Delta(t\sqrt{n}-s)]\sqrt{n}}{2}$.

De même on aura $\epsilon\sqrt{n} + v - \epsilon\sqrt{n} + v = \varphi(t\sqrt{n}+s) - \Delta(t\sqrt{n}-s)$. Donc $v = \frac{\varphi(t\sqrt{n}+s) - \Delta(t\sqrt{n}-s)}{2}$.

CLXXXVI.

Troiſieme exemple plus compliqué que les deux précédens.

PROBLEME 3. Soient données deux quantités

$$\alpha ds + \epsilon dt$$

$\int \alpha dt + v\epsilon ds + dt\,\Delta(t,s) + ds\,\Gamma(t,s)$ dans leſquelles $\int$ & v déſignent des conſtantes données, $\Delta(t,s)$, $\Gamma(t,s)$ des fonctions quelconques données de t & de s. De plus ces deux quantités ſont l'une & l'autre des différentielles exactes de quelque fonction de t & de s; déterminer α & ϵ.

SOLUTION. Je diviſe par la conſtante $\int$ tous les termes de la ſeconde différentielle, le Problême ſe réduira à opérer ſur les deux quantités

$$\alpha ds + \epsilon dt$$

& . . . . . $\alpha ds + \frac{v\epsilon ds}{\int} + \frac{dt\,\Delta(t,s)}{\int} + \frac{ds\,\Gamma(t,s)}{\int}$,

de maniere qu'elles ſoient l'une & l'autre une différentielle complete.

Soit $\frac{v}{\int} = n$, je diviſe la ſeconde différentielle par $\sqrt{n}$, & j'écris . . $\epsilon\sqrt{n} \cdot \frac{dt}{\sqrt{n}} + \alpha ds$

$$\frac{\alpha dt}{\sqrt{n}} + \epsilon\sqrt{n} \cdot ds + \frac{dt\,\Delta(t,s)}{\int\sqrt{n}} + \frac{ds\,\Gamma(t,s)}{\int\sqrt{n}}.$$

Or chacune de ces deux différentielles devant être complete, il faut que leur ſomme & leurs différences ſoient auſſi chacune une differentielle complete.

On aura donc 1°. en les ajoutant enſemble $(\epsilon\sqrt{n} + \alpha) \cdot \left\{\frac{dt}{\sqrt{n}} + ds\right\} + \frac{dt\,\Delta(t,s)}{\int\sqrt{n}} + \frac{ds\,\Gamma(t,s)}{\int\sqrt{n}}$.

Soit . . . . . $\epsilon\sqrt{n} + \alpha = m$

$$\frac{t}{\sqrt{n}} + s = u,$$

en ſubſtituant ces valeurs & nommant $\psi(u,s)$ & $\Pi(u,s)$

les fonctions de u & de s qui viennent de la ſubſtitution de $(u-s)\sqrt{n}$ au lieu de t dans $\Delta(t,s)$ & $\Gamma(t,s)$, on aura la transformée ſuivante

$$m\,du + du\,\downarrow(u,s) + ds\,\Pi(u,s)$$

qui doit être une différentielle complete. On aura donc par le Théorême fondamental $\frac{dm}{ds} + \frac{d\downarrow(u,s)}{ds} = \frac{d\Pi(u,s)}{du}$, s variant ſeul dans le premier membre & u ſeul dans le ſecond. Donc $dm = -d\downarrow(u,s) + \frac{ds\,d\Pi(u,s)}{du}$. Donc en prenant s pour variable & u pour conſtant, on a $m = -\downarrow(u,s) + \varphi u + \int ds\,\frac{d\Pi(u,s)}{du}$.

2°. Retranchons maintenant la ſeconde de nos deux différentielles de la premiere, nous aurons $(\epsilon\sqrt{n}-\alpha).\left\{\frac{dt}{\sqrt{n}} - ds\right\} - \frac{dt\,\Delta t,s}{\varsigma\sqrt{n}} - \frac{ds\,\Gamma t,s}{\varsigma\sqrt{n}}$ qui doit encore être une différentielle complete.

Soit . . . . . $\epsilon\sqrt{n}-\alpha = \mu$

$$\frac{t}{\sqrt{n}} - s = y,$$

on aura $\mu\,dy + dy\,\Xi(y,s) + ds\,F(y,s)$, transformée qui eſt une différentielle exacte. Donc on aura par le Théorême fondamental $\frac{d\mu}{ds} + \frac{d\Xi(y,s)}{ds} = \frac{dF(y,s)}{dy}$; & en ſuppoſant s variable & y conſtant $\mu = -\Xi(y,s) + \Sigma y + \int ds\,\frac{dF(y,s)}{dy}$.

Or $\mu = \epsilon\sqrt{n}-\alpha$, donc $\epsilon\sqrt{n} = \alpha+\mu$. De même $m = \alpha + \epsilon\sqrt{n}$; donc $\epsilon\sqrt{n} = m-\alpha$. Donc $\alpha+\mu = m-\alpha$. Donc $\alpha = \frac{m-\mu}{2}$. Maintenant $\alpha = \epsilon\sqrt{n}-\mu$. Donc $\epsilon = \frac{m+\mu}{2\sqrt{n}}$. On aura par conſéquent les valeurs de α & ϵ, puiſqu'on a celles de m & de μ.

CLXXXVII.

REMARQUE. Il n'y auroit aucune difficulté pour l'intégration, quand même $\sqrt{n}$ ſeroit imaginaire. Car ſi α & ϵ doivent être réelles, nous avons appris dans l'Introduction à en faire évanouir les imaginaires.

CLXXXVIII.

PROBLEME 4. Soient encore les deux différentielles plus générales que les précédentes

Quatrieme exemple qui renferme les trois autres.

$$\alpha ds + \epsilon du$$

&

$$\rho\alpha du + p\epsilon du + \gamma\epsilon ds + m\alpha ds + dt\,\Delta(u,s) + ds\,\Gamma(u,s)$$

qui doivent être l'une & l'autre une différentielle exacte, trouver α & ϵ.

SOLUTION. Soit . . . . $ku + rs = gy$

& . . . . . $fu + \delta s = ht$,

k, r, g, f, δ, h ſont des conſtantes indéterminées; on aura . . . . . $s = \frac{gfy - hkt}{fr - \delta k}$

& . . . . . $u = \frac{hrt - \delta gy}{fr - \delta k}$;

ou en changeant les ſignes $u = \frac{\delta gy - hrt}{\delta k - fr}$.

On aura par conſéquent $ds = \frac{fgdy - hkdt}{fr - \delta k}$; $du = \frac{\delta gdy - hrdt}{\delta k - fr}$.

Soit . . . . . $\frac{fg}{fr - \delta k} = \lambda$

$$\frac{-hk}{fr - \delta k} = \varphi$$

$$\frac{\delta g}{\delta k - fr} = \mu$$

$$\frac{-hr}{\delta k - fr} = \upsilon$$

on aura . . . . . $ds = \lambda dy + \varphi dt$,

& . . . . . $du = \mu dy + \nu dt$.

Je ſubſtitue ces valeurs dans les deux différentielles propoſées. La premiere devient

$$\alpha\lambda dy + \epsilon\mu dy + \alpha\varphi dt + \epsilon\nu dt;$$

& la ſeconde multipliée par un coefficient indéterminé n ſera $\{(\rho\alpha + p\epsilon)\mu + (\gamma\epsilon + m\alpha)\lambda\} n dy + n dy \Delta(y,t) + \{(\rho\alpha + p\epsilon)\nu + (\gamma\epsilon + m\alpha)\varphi\} n dt + n dt \downarrow y,t$.

1°. J'ajoute enſemble ces deux différentielles, j'aurai $(\alpha\lambda + \epsilon\mu + \rho\alpha\mu n + p\epsilon\mu n + \gamma\epsilon\lambda n + m\alpha\lambda n)\, dy + n dy \Delta y,t + (\alpha\varphi + \epsilon\nu + \rho\alpha\nu n + p\epsilon\nu n + \gamma\epsilon\varphi n + m\alpha\varphi n)\, dt + n dt \downarrow y,t$. Il eſt donc viſible qu'on pourra trouver les valeurs de α & ϵ, ſi dans cette équation $\alpha\lambda + \epsilon\mu + \rho\alpha\mu n + p\epsilon\mu n + \gamma\epsilon\lambda n + m\alpha\lambda n = 0$; & (en prenant une autre valeur de n) $\alpha\varphi + \epsilon\nu + \rho\alpha\nu n + \gamma\epsilon\varphi n + m\alpha\varphi n + p\epsilon\nu n = 0$.

Mais pour que l'équation $\alpha(\lambda + \rho\mu n + m\lambda n) + \epsilon.(\mu + p\mu n + \gamma\lambda n) = 0$ ait lieu, quelles que ſoient les valeurs de α & de ϵ, il faut que $\lambda + \rho\mu n + m\lambda n = 0$, & qu'auſſi $\mu + \mu p n + \gamma\lambda n = 0$. Ces deux équations nous donnent $(1 + mn)\lambda = -\rho\mu n$; d'où l'on tire $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{-\rho n}{1 + mn}$; & $(1 + pn)\mu = -\gamma\lambda n$; d'où l'on tire $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1 + pn}{-\gamma n}$. Donc $\frac{-\rho n}{1 + mn} = \frac{1 + pn}{-\gamma n}$. Nous tirerons de cette équation une valeur de n telle que $\alpha\lambda + \epsilon\mu + \rho\alpha\mu n + p\epsilon\mu n + \gamma\epsilon\lambda n + m\alpha\lambda n = 0$.

De même pour que $\alpha(\varphi + \rho\nu n + m\varphi n) + \epsilon(\nu + p\nu n + \gamma\varphi n) = 0$, quelles que ſoient les valeurs de α & de ϵ, il faut que $\varphi + \rho\nu n + m\varphi n = 0$, & $\nu + p\nu n + \gamma\varphi n = 0$. De ces

ces équations on tire $(1+mn)\varphi = -\rho v n$; ou $\frac{\varphi}{v} = \frac{-\rho n}{1+mn}$; & encore $(1+pn)v = -\gamma\varphi n$, ou $\frac{\varphi}{v} = \frac{1+pn}{-\gamma n}$. Donc $\frac{-\rho n}{1+mn} = \frac{1+pn}{-\gamma n}$; & par conséquent pour trouver n on aura la même équation qu'auparavant.

Je la résous cette équation $\frac{-\rho n}{1+mn} = \frac{1+pn}{-\gamma n}$; j'aurai $n^2 - \frac{(m+p)n}{\gamma\rho - mp} = \frac{1}{\gamma\rho - mp}$. Donc $n - \frac{(m+p)}{2.(\gamma\rho - mp)} = \pm\sqrt{\frac{1}{\gamma\rho - mp} + \frac{(m+p)^2}{4.(\gamma\rho - mp)^2}}$. Donc enfin $n = \frac{m+p}{2(\gamma\rho - mp)} \pm \frac{\sqrt{[4\gamma\rho + (m-p)^2]}}{2(\gamma\rho - mp)}$; & ce sont-là les deux valeurs de n.

Je multiplie la seconde différentielle transformée, 1°. par une des deux valeurs de n, ensuite par l'autre; j'aurai les deux équations suivantes : la premiere $(\rho\alpha\mu + p\epsilon\mu + \gamma\epsilon\lambda + m\alpha\lambda) \times \left\{\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dy + \left\{\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dy\Delta y, t + (\rho\alpha v + p\epsilon v + \gamma\epsilon\varphi + m\alpha\varphi) \times \left\{\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dt + \left\{\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dt\downarrow y, t.$

La seconde sera $(\rho\alpha\mu + p\epsilon\mu + \gamma\epsilon\lambda + m\alpha\lambda) \times \left\{\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dy + \left\{\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dy\Delta y, t + (\rho\alpha v + p\epsilon v + \gamma\epsilon\varphi + m\alpha\varphi) \cdot \left\{\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dt + \left\{\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dt\downarrow y, t.$

A ces deux différentielles j'ajoute la premiere différentielle transformée $(\alpha\lambda + \epsilon\mu)\,dy + (\alpha\varphi + \epsilon v)\,dt$, à laquelle je donne la forme suivante $\left(\frac{\alpha\lambda}{\mu} + \epsilon\right)\mu\,dy + \left(\frac{\alpha\varphi}{v} + \epsilon\right)v\,dt$, j'aurai 1°. $\left\{\rho\alpha + p\epsilon + \frac{\lambda}{\mu}(\gamma\epsilon + \alpha m)\right\}$

$$\times \left(\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right)+\frac{\alpha\lambda}{\mu}+\epsilon\Big\}\mu dy+$$
$$\left(\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right)dy\Delta y,t+\Big\{\Big(\rho\alpha+p\epsilon+$$
$$\frac{\varphi}{v}(\gamma\epsilon+\alpha m)\Big)\times\left(\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right)+\frac{\alpha\varphi}{v}+\epsilon\Big\}$$
$$v\,dt+\left(\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp).}\right)dt+y,t.$$

2°. On aura $\Big\{\Big(\rho\alpha+p\epsilon+\frac{\lambda}{\mu}(\gamma\epsilon+\alpha m)\Big)\times$
$$\left(\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right)+\frac{\alpha\lambda}{\mu}+\epsilon\Big\}\mu dy+$$
$$\left(\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right)dy\Delta y,t+\Big\{\Big(\rho\alpha+p\epsilon+$$
$$\frac{\varphi}{v}(\gamma\epsilon+\alpha m)\Big)\times\left(\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right)+\frac{\alpha\varphi}{v}+\epsilon\Big\}$$
$$v\,dt+\left(\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right)dt+y,t.$$

Dans ces deux différentielles je mets au lieu de $\frac{\lambda}{\mu}$ sa valeur $\frac{-\rho n}{1+mn}$, & au lieu de $\frac{\varphi}{v}$ sa valeur $\frac{-\rho n}{1+mn}$, en observant d'y prendre deux valeurs différentes de n; & alors j'aurai deux différentielles intégrables par la méthode du Problême 3.

CLXXXIX.

Examen de quelques cas particuliers.

SCHOLIE 1. Il ne peut y avoir de difficulté que dans deux cas. L'un seroit celui dans lequel l'équation $\frac{-\rho n}{1+mn}=\frac{1+pn}{-\gamma n}$ ou bien $(\gamma\rho-mp)n^2-(m+p)n-1=0$ ne monteroit pas au second degré. Le second seroit celui dans lequel cette même équation ne pourroit se résoudre. Le premier de ces deux cas arrivera, si $\gamma\rho=mp$: car alors $(\gamma\rho-mp)n^2=0$, & l'équation n'est plus que du premier degré, & par conséquent n n'a qu'une seule valeur.

Le second cas arrivera si $\gamma\varsigma = m p$, & si de plus $m = -p$; car alors on auroit $-1 = 0$, ce qui est impossible. Examinons ce qu'il faudra faire dans ces deux cas.

1°. Si $\gamma\varsigma = mp$, je fais $p = \varsigma K$, j'aurai $\gamma\varsigma = mK\varsigma$; donc $\gamma = Km$. Les deux différentielles seront donc la premiere

$$\alpha\, ds + \epsilon\, du,$$

& la seconde

$$\varsigma\alpha\, du + \varsigma K\epsilon\, du + K\epsilon m\, ds + m\alpha\, ds + dt\,\Delta u, s + ds\,\Gamma u, s,$$

ou bien,

$$(\varsigma\, du + m\, ds).(\alpha + K\epsilon) + du\,\Delta u, s + ds\,\Gamma u, s.$$

Soit maintenant . . . . . $\varsigma u + ms = t$, on aura $\varsigma\, du + m\, ds = dt$, & soit $\alpha + K\epsilon = \mu$, la différentielle précédente deviendra celle-ci $\mu\, dt + ds \downarrow u, s + dt\, \Xi u, s$ & sera une différentielle complete. On aura donc par le Théorême fondamental $\frac{d\mu}{ds} + \frac{d\,\Xi u, s}{ds} = \frac{d \downarrow u, s}{dt}$. Donc $d\mu = -d\,\Xi u, s + \frac{ds\, d \downarrow u, s}{dt}$. Donc enfin $\mu = -\Xi u, s + \varphi t + \int \frac{ds\, d \downarrow u, s}{dt}$.

Pour déterminer α je fais les mêmes transformations sur la différentielle $\alpha\, ds + \epsilon\, du$. Ces transformations nous donnent $du = \frac{dt - m\, ds}{\varsigma}$, $\epsilon = \frac{\mu - \alpha}{K}$. Donc la premiere différentielle transformée sera $\alpha\, ds + \left(\frac{\mu - \alpha}{K}\right).\left(\frac{dt - m\, ds}{\varsigma}\right)$; ou bien $\left(ds + \frac{m\, ds}{K\varsigma} - \frac{dt}{K\varsigma}\right)\alpha + \frac{\mu\, dt}{K\varsigma} - \frac{m\mu\, ds}{K\varsigma}$. Soit $\left(1 + \frac{m}{K\varsigma}\right) s - \frac{t}{K\varsigma} = y$, on aura $ds + \frac{m\, ds}{K\varsigma} - \frac{dt}{K\varsigma} = dy$; & aussi $\frac{\mu\, dt}{K\varsigma} = \mu\, ds + \frac{\mu m\, ds}{K\varsigma} - \mu\, dy$. Donc la différen-

tielle précédente se change en celle-ci $(\alpha - \mu)\,dy + \mu\,ds$. Donc comme elle est une différentielle complete, on aura $\frac{d\alpha}{ds} - \frac{d\mu}{ds} = \frac{d\mu}{dy}$. Donc enfin $\alpha = \mu + \int \frac{ds\,d\mu}{dy}$. Donc aussi on aura la valeur de ϵ, puisque $\epsilon = \frac{\mu - \alpha}{K}$.

2°. Si l'on a $p = -m$ & $\rho\gamma = mp$, on fera usage de la méthode que nous venons d'exposer pour le cas où l'on a seulement $\rho\gamma = mp$. Ainsi ce second cas ne présente aucune nouvelle difficulté.

CXC.

SCHOLIE 2. On pourroit encore être embarrassé dans le cas où n auroit ses deux racines égales. Examinons ce qu'il faut faire dans ce cas, lequel aura lieu si $-4\gamma\rho = (m-p)^2$, comme on le voit sans peine. Dans ce cas on supposera seulement $\alpha\lambda + \epsilon\mu + \rho\alpha\mu n + p\epsilon\mu n + \gamma\epsilon\lambda n + m\alpha\lambda n = 0$; ce qui nous donne, en faisant le même raisonnement que dans l'Article CLXXXVIII. $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{-\rho n}{1+mn}$, & $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1+pn}{-\gamma n}$. Donc on aura de même $\frac{-\rho n}{1+mn} = \frac{1+pn}{-\gamma n}$; donc à cause de l'hypothese présente $n = \frac{m+p}{2(\gamma\rho - mp)}$. Je substitue cette valeur de n dans le coefficient de dt; c'est-à-dire, dans $\alpha\varphi + \epsilon v + \rho\alpha v n + p\epsilon v n + \gamma\epsilon\varphi n + m\alpha\varphi n$; & la seconde transformée sera en prenant pour φ & pour v tout ce qu'on voudra, $n\,dy\,\Delta y, t + \left\{\alpha\left(\varphi + (\rho v + m\varphi).\left(\frac{m+p}{2(\gamma\rho - mp)}\right)\right) + \epsilon\left(v + (pv + \gamma\varphi).\left(\frac{m+p}{2.(\gamma\rho - mp)}\right)\right)\right\} dt + n\,dt\,\Delta y, t$; & en supposant $\varphi + (\rho v + m\varphi) \times \left(\frac{m+p}{2.(\gamma\rho - mp)}\right) = M$, & $v + (pv + \gamma\varphi) \times \frac{m+p}{2.(\gamma\rho - mp)}$

$= N$, on aura la différentielle ſuivante,

$$(M\alpha + N\epsilon)\,dt + n\,dy\,\Delta y, t + n\,dt\,\downarrow y, t,$$

dans laquelle M & N repréſentent des conſtantes données.

Cette différentielle étant par l'hypotheſe une différentielle complète, on aura $\frac{M\,d\alpha + N\,d\epsilon}{dy} + \frac{d(n\downarrow y, t)}{dy} = \frac{d(n\Delta y, t)}{dt}$. Donc $M\,d\alpha + N\,d\epsilon = -d(n\downarrow y, t) + \frac{dy\,d(n\Delta y, t)}{dt}$. On aura donc la valeur de $M\alpha + N\epsilon$ en y & en t, ou ce qui revient au même en s & en u, puiſque, comme on l'a vu (Art. CLXXXVIII.) $s = \frac{gfy - hkt}{fr - \delta k}$, & $u = \frac{\delta gy - hrt}{\delta k - fr}$. Nous pourrons donc ſuppoſer

$$\alpha = \Sigma u, s + K\epsilon,$$

K étant une conſtante connue. Subſtituant pour α cette valeur dans la différentielle $\alpha\,ds + \epsilon\,du$ qui par la ſuppoſition eſt une différentielle exacte, on aura $\epsilon(K\,ds + du) + ds\,\Sigma u, s$. Donc en ſuppoſant $Ks + u = r$, on aura la transformée ſuivante $\epsilon\,dr + ds\,\Sigma s, r$ qui doit encore être une différentielle complete : on trouvera donc facilement la valeur de ϵ en s & r, ou ce qui eſt la même choſe en s & en u.

CXCI.

SCHOLIE 3. Il y a encore un cas dans lequel la premiere méthode ne peut réuſſir ; c'eſt lorſque $\rho = 0$. Mais alors l'intégration n'en ſera que plus facile. En effet, je donne à la ſeconde différentielle propoſée $\rho\alpha\,du + \epsilon p\,du + \gamma\epsilon\,ds + m\alpha\,ds + dt\,\Delta u, s + ds\,\Gamma u, s$ la forme ſuivante $m\alpha\,ds + me\,du + pe\,du - me\,du + \gamma\epsilon\,ds + dt\,\Delta u, s +$

$ds\Gamma u, s$. Or par l'hypotheſe $\alpha ds + \epsilon du$ eſt une différentielle exacte; donc la partie reſtante $(p\epsilon - m\epsilon)\,du + \gamma\epsilon\,ds + dt\Delta u, s + ds\Gamma u, s$ doit encore être complete. Je ſuppoſe $(p - m)\,u + \gamma s = t$, j'aurai la transformée ſuivante . . . . . $\epsilon dt + d\downarrow s, t + ds\Delta t, s$, qui ſera une différentielle complete. Donc en ſuivant les méthodes précédentes on déterminera facilement ϵ & par conſéquent α.

Si γ étoit $= 0$, alors on auroit pour ſeconde différentielle $\rho\alpha\,du + p\epsilon\,du + m\alpha\,ds + dt\Delta u, s + ds\Gamma u, s$ à laquelle on donneroit la forme ſuivante $p\alpha\,ds + p\epsilon\,du + (m\alpha - p\alpha)\,ds + \rho\alpha\,du + dt\Delta u, s + ds\Gamma u, s$. Or par l'hypotheſe $\alpha ds + \epsilon du$ eſt une différentielle complete; donc la partie reſtante $(m\alpha - p\alpha)\,ds + \rho\alpha\,du + dt\Delta u, s + ds\Gamma u, s$ en eſt auſſi une. Suppoſant $(m - p)\,s + \rho u = t$, on déterminera α & enſuite ϵ par la même voie par laquelle on a trouvé ϵ & enſuite α dans l'article précédent.

Nous allons maintenant expoſer les méthodes qui ſont connues pour l'intégration des différentielles d'un ordre plus élevé que le premier.

SECTION SECONDE.

De l'Intégration des Différentielles à pluſieurs variables du ſecond ordre, ou d'un ordre plus élevé.

CXCII.

Notions préliminaires.

LES différences ſecondes, troiſiemes, quatriemes, &c. s'expriment de deux façons différentes, 1°. de la façon ſuivante ddx, $dddx$, $ddddx$, &c. en mettant l'un après l'autre un nombre de d égal au degré de la différence; ou bien 2°. en mettant au d un expoſant qui contienne un nombre d'unités égal au degré de la différence, comme d^2x, d^3x, d^4x & en général d^nx.

Nous réduirons ici les différentielles du ſecond ordre à celles du premier, dont l'intégration nous a occupés juſqu'à préſent; nous réduirons de même les différentielles du troiſieme ordre à celles du ſecond, & ainſi de ſuite.

CXCIII.

Avant d'expliquer les regles qu'il faut ſuivre dans l'intégration des équations à pluſieurs variables qui contiennent des ſecondes, ou des troiſiemes, ou des quatriemes différences, il eſt bon de ſe rappeller leur formation.

La différence de ydx, en regardant y & dx comme variables, eſt $dydx+yddx$. Celle de $dydx+yddx$ eſt $dyddx+dxddy+yd^3x+d^2xdy$, & ainſi des troiſiemes, quatriemes, &c. différences.

De là il eſt facile de tirer cette propoſition. L'intégrale de $dydx+yd^2x$ eſt ydx. Celle de $dyd^2x+dxd^2y+yd^3x+d^2xdy$ eſt $dydx+yddx$.

La différence de $\frac{dx}{dy}$ eſt $\frac{dyddx-dxddy}{dy^2}$; & celle de $\frac{ydx}{xdy}$ eſt $\frac{xydyddx+xdxdy^2-xydxd^2y-ydydx^2}{x^2dy^2}$. Donc l'intégrale de $\frac{dyd^2x-dxd^2y}{dy^2}$ eſt $\frac{dx}{dy}$; & ainſi des autres.

CXCIV.

REMARQUE 1. Lorſqu'on paſſe des premieres différences aux différences ſecondes, troiſiemes, quatriemes, &c. on regarde quelquefois comme conſtante une différentielle du premier, du ſecond, du troiſieme ordre. Ainſi, par exemple, en différentiant x^mdxdy, je puis regarder dx comme conſtante, & alors la différentielle de la propoſée ſera $mx^{m-1}dx^2dy+x^mdxddy$. De là il ſuit évidemment que quand dans cette même hypotheſe il s'agira d'intégrer $mx^{m-1}dx^2dy+x^mdxddy$, il faudra traiter dx comme une conſtante ordinaire.

CXCV.

REMARQUE 2. On doit de plus ſe ſouvenir que de même que dans la réduction des différentielles du premier ordre

ordre aux grandeurs finies, on ajoute une conſtante pour completer l'intégrale, il en faut auſſi ajouter une dans la réduction des ſecondes différences aux premieres, des troiſiemes aux ſecondes, &c. Il ſuit même de la Remarque précédente que la conſtante qu'il faudra ajouter à l'intégrale, ſera une différentielle du premier ordre, lorſque la différentielle propoſée ſera du ſecond; que cette conſtante ſera une différentielle du ſecond ordre, lorſque la propoſée ſera du troiſieme; & ainſi de ſuite. Après ces notions préliminaires entrons en matiere.

CHAPITRE PREMIER.

De l'intégration de certaines différentielles du ſecond ordre, dans le cas où l'on ſait que telle ou telle différentielle du premier ordre a été traitée comme conſtante dans le paſſage des premieres différences aux ſecondes.

CXCVI.

SOit l'équation $\frac{by^m dy\,du}{c^m} = 2ay\,ddx + a\,dx\,dy$, dans laquelle $du =$ (Art. XCI. Prem. Partie.) $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ eſt l'élément de la rectification de la courbe, & eſt ſuppoſée conſtante. J'obſerve que le ſecond membre de cette équation ſeroit intégrable, s'il étoit diviſé par $2\sqrt{y}$, ce que je puis trouver par le Théorême fondamental de la

Premier exemple.

premiere Section, en mettant z & dz au lieu de dx & de ddx; j'obſerve auſſi que le premier membre du étant conſtante, ſera toujours intégrable, quelque fonction de y qui le diviſe ou le multiplie. Je diviſe donc toute l'équation par $2\sqrt{y}$, elle devient $\frac{by^m dy\,du}{2c^m\sqrt{y}} = ay^{\frac{1}{2}} ddx + \frac{adxdy}{2\sqrt{y}}$, dont l'intégrale eſt $\frac{by^{m+\frac{1}{2}}du}{(m+\frac{1}{2})\cdot 2c^m} = udy^{\frac{1}{2}}dx + gdu$. gdu eſt la conſtante que j'ajoute pour rendre l'intégrale complete.

CXCVII.

Second exemple.

Soit l'équation $Y = \frac{dx^2 - yddy}{y^3 dx^2}$, dans laquelle ydx qui exprime l'élément de l'aire de la courbe, eſt ſuppoſée conſtante, Y repréſente une fonction quelconque de y. Pour intégrer cette équation, je la multiplie par $2dy$, ce qui me donne $2Ydy = \frac{2dy}{y^3} - \frac{2dyddy}{y^m dx^2}$. Or l'intégrale de cette équation ydx étant conſtante, eſt $\int 2Ydy = -\frac{1}{yy} - \frac{dy^2}{yydx^2} \pm nyydx^2$.

CXCVIII.

Troiſieme exemple.

Si la propoſée étoit $Y = \frac{du^2 - yddy}{y^3 dx^2}$, & que dx fût conſtante, Y repréſentant une fonction quelconque de y. Puiſque $du = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; donc $du^2 = dx^2 + dy^2$, & différentiant $du\,ddu = dy\,ddy$. Subſtituant cette valeur de ddy dans l'équation, & la multipliant par $2y$, on a $2Ydy = \frac{2ydydu^2 - 2yydduddu}{y^4 dx^2}$, équation dont l'in-

tégrale est $\int 2Ydy = -\frac{du^2}{yydx^2} \pm ndx^2$.

CXCIX.

On pourroit encore intégrer cette équation d'une autre maniere. Je mets pour du sa valeur $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, ce qui me donne $Y = \frac{dx^2+dy^2-yddy}{y^3dx^2}$, & multipliant par $2ydy$, on a $2Ydy = \frac{2ydydx^2+2ydy^3-2y^2dyddy}{y^4dx^2}$. Or dx étant constante, on voit facilement que l'intégrale de cette équation est $\int 2Ydy = \frac{-dx^2-dy^2}{yydx^2} \pm ndx^2$; qui est absolument la même que la précédente, puisque $du = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$.

CC.

Quatrieme exemple.

Qu'on nous demande maintenant l'intégrale de cette équation $Y = \frac{dxdydu^2+ydu^2ddx-ydxduddu}{ydxdydt^2}$, dans laquelle du est l'élément de l'arc de la courbe, t est une fonction de x & de y; aucune différentielle n'ayant été prise pour constante. Je multiplie toute l'équation par $\frac{2}{y^3dx^3}$, ce qui me donne $\frac{2Ydxdydt^2}{y^3dx^3} = \frac{2dxdydu^2+2ydu^2ddx-2ydxduddu}{y^3dx^3}$: réduisant & multipliant le second membre de cette équation haut & bas par ydx, on aura $\frac{2Ydydt^2}{yydx^2} = \frac{2ydydx^2du^2+2y^2du^2dxd^2x-2y^2dx^2dud^2u}{y^4dx^4}$, dont l'intégrale est $\int\frac{2Ydydt^2}{y^2dx^2} = \frac{-du^2}{y^2dx^2} \pm C$.

CCI.

Il arrive souvent que dans une équation telle différentielle est constante qui rend l'intégration très-difficile. Il

ſeroit alors fort utile de transformer l'équation en une autre dans laquelle cette différentielle fût variable. C'eſt ce que nous apprend la méthode ſuivante ; par ſon moyen on change l'équation propoſée en une autre qui n'a aucune différentielle conſtante. C'eſt ce que M. Bernoulli appelle completer une équation différentielle. Au reſte, la méthode que nous donnons ici eſt plus ſimple & plus claire que celle qu'emploie ce grand Géometre.

CHAPITRE II.

Méthode pour rendre completes les équations différentielles de tous les degrés.

CCII.

Expoſition de cette méthode appliquée à des différentielles du ſecond ordre.

PROBLEME. ÉTant donnée une équation telle que $A\,ddy + B\,dx^2 + C\,dy^2 + E\,dx\,dy = 0$ dans laquelle dx eſt conſtant, la transformer en une autre dans laquelle dx ſoit variable.

SOLUTION. Soit AC ou $BK = dx$, $KF = dy$; dx étant conſtant, on aura CD ou $FG = dx$, $GI = dy$, $IH = ddy$. IH ſera donc le ddy, dans le cas où dx ne varie point ; c'eſt par conſéquent le ddy de l'équation propoſée. Faiſons maintenant varier dx, & ſoit DE ou $GL = ddx$, on voit clairement que $LM = dy + ddy$; Il s'agit donc de trouver la valeur du premier ddy, c'eſt-

Figure 8.

à-dire, de IH en ddx & ddy, ce qui fera disparoître ce premier ddy, & mettra dans l'équation le nouveau $d'd'y$ avec le ddx. Or les triangles semblables FLM, FGH nous donnent l'analogie suivante $LM : GH :: FL : FG$, c'est-à-dire $dy + d'd'y : dy + ddy :: dx + ddx : dx$. Donc $dydx + dxd'd'y = dxdy + dyddx - dxddy + ddyddx$. J'efface le terme $ddyddx$ qui est nul par rapport aux autres : j'aurai $ddy = \frac{dxd'd'y - dyddx}{dx}$. C'est la valeur qu'il faut substituer dans l'équation proposée à la place de ddy. Après cette substitution on aura une équation complete, c'est-à-dire, qui ne contiendra plus de différentielle constante.

CCIII.

Autre maniere de résoudre ce Problême.

On peut encore résoudre ce Problême d'une autre maniere. Reprenons la proposée $Addy + Bdx^2 + Cdy^2 + Edxdy = 0$, je la mets sous la forme suivante $\frac{Addy}{dx} + Bdx + \frac{Cdy^2}{dx} + Edy = 0$, ou bien $Ad(\frac{dy}{dx}) + \ldots$ &c. $= 0$. Or dans cette équation il n'y a plus aucune différentielle constante, puisque $\frac{dy}{dx}$ est une quantité finie. Mais $d.(\frac{dy}{dx}) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$. C'est la valeur qu'il faudra substituer à $\frac{ddy}{dx}$ dans l'équation précédente. Donc la valeur qu'il faut substituer à ddy sera $\frac{dxddy - dyddx}{dx}$, la même que nous avons déja trouvée.

CCIV.

Application de la méthode aux différentielles du troisieme ordre.

Soit maintenant une équation différentielle du troisieme ordre $Ad^3y + Bdxddy + Cdx^3 + Edy^3 + Fdydx^2 + Dddyddy + Gdxdy^2 = 0$ dans laquelle dx est constant, & qu'on veut completer. Je divise cette équation par dx^2, & j'ai $\frac{Ad^3y}{dx^2} + \ldots$ &c. $= 0$, ou $Ad.(\frac{ddy}{dx^2}) + \ldots$ &c. $= 0$, réduite au cas des équations du second ordre. Pour trouver maintenant la valeur qu'il faudra substituer au lieu de d^3y, je mets l'équation sous cette forme $\frac{Add(\frac{dy}{dx})}{dx} + \ldots$ &c. $= 0$. Soit $p = \frac{dy}{dx}$, $dp = d.(\frac{dy}{dx})$, $\frac{dp}{dx} = \frac{d.(\frac{dy}{dx})}{dx}$, on aura $d.(\frac{dp}{dx}) = \frac{dd.(\frac{dy}{dx})}{dx}$. Mais ddp = (Art. CCIII.) $ddp - \frac{dpddx}{dx} = dd.(\frac{dy}{dx}) - \frac{ddxd(\frac{dy}{dx})}{dx}$. $= \frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dydxd^3x}{dx^3}$. Donc $\frac{ddp}{dx}$, ou $\frac{dd(\frac{dy}{dx})}{dx}$, ou $\frac{d^3y}{dx^2} = \frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dydxd^3x}{dx^4}$. Donc enfin la valeur à substituer dans l'équation pour d^3y sera $\frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dydxd^3x}{dx^3}$.

CCV.

On trouveroit de même pour les équations du quatrieme, du cinquieme, &c. ordre, les valeurs qu'il y faudroit substituer à la place de d^4y, d^5y, &c. pour rendre ces équations completes.

CCVI.

Scholie. Mais, demandera-t-on, quel avantage retirerons-nous de completer ici l'équation proposée? n'est-ce pas au contraire en rendre l'intégration plus difficile? Cet avantage est très-réel : après avoir rendu l'équation complete, nous serons les maîtres de traiter comme constante la différentielle qui facilitera le plus la réduction aux premieres différences. Quelques exemples vont nous en convaincre,

En quoi consiste l'utilité de cette méthode.

CCVII.

Soit proposée d'intégrer l'équation $dx^2 dy - dy^3 = a dx ddy + x dx ddy$ dans laquelle dx est constant, & où l'on voudroit que dy le fût. Je rends d'abord l'équation complete, & pour cela au lieu de ddy je mets sa valeur $\frac{dx ddy - dy ddx}{dx}$; cette substitution me donne $dx^2 dy - dy^3 = a dx ddy - a dy ddx + x dx ddy - x dy ddx$, équation dans laquelle aucune différentielle n'est constante. Je suppose à présent que dy est constante; j'aurai donc $ddy = 0$; donc la proposée devient $dx^2 - dy^2 + a ddx + x ddx = 0$, dont l'intégrale est $x dx + a dx - y dy = C dy$.

Son application à plusieurs exemples.

Premier exemple.

CCVIII.

Qu'on propose maintenant l'équation suivante, $\frac{x dy^2 + xy ddy + y dy dx}{y dy} = \frac{x x dx - a a dx}{a a + x x}$, dans laquelle on a traité comme constante $y dx$, & qu'on veut transformer en une autre dans laquelle $y dx$ soit variable & $x dy$

Second exemple plus compliqué que le premier.

constante ; puisque ydx est constante, on aura $ddy = d\left(\frac{dy}{ydx}\right) \times ydx$: c'est-à-dire $ddy = \frac{ydxddy - dxdy^2 - ydyddx}{ydx}$. Je substitue pour ddy cette valeur dans l'équation proposée, elle devient $\frac{xdy}{y} + dx + \frac{xydxddy}{ydydx} - \frac{xdxdy^2 - xydyddx}{ydydx} = \frac{xxdx - aadx}{aa + xx}$; équation dans laquelle aucune différentielle n'est constante. Je prends maintenant pour constante xdy ; cette supposition me donne $xddy + dydx = 0$, ou bien $\frac{dxdy}{x} = -ddy$. Je substitue dans la transformée pour ddy cette valeur, & je trouve $\frac{xdy}{y} + dx - dx \frac{xdy}{y} - \frac{xddx}{dx} = \frac{xxdx - aadx}{aa + xx}$. Donc en réduisant on a $-\frac{ddx}{dx} = \frac{xxdx - aadx}{aax + x^3}$. J'integre, & j'ai $-ldx + lxdy$, ou $l\frac{xdy}{dx} = l\left(\frac{aa+xx}{x}\right)$. Donc $\frac{xdy}{dx} = \frac{aa+xx}{x}$, ou bien $xxdy = aadx + xxdx$; ou enfin $dy = \frac{aadx}{xx} + dx$. Donc $y + \frac{aa}{x} - x + C = 0$.

CCIX.

Troisieme exemple. Soit enfin proposé d'intégrer l'équation suivante $-\frac{dxddy}{dy} - \frac{dydx}{y} = \frac{dy^2 + dx^2}{x}$, dans laquelle ydx est constante. Pour completer cette équation, je mets au lieu de ddy sa valeur trouvée plus haut $\frac{ydxddy - dxdy^2 - ydyddx}{ydx}$, & j'aurai la transformée suivante $\frac{-dxddy + dyddx}{dy} = \frac{dx^2 + dy^2}{x}$ qui est complete. Supposons à présent que dy est constant, nous aurons $ddy = 0$, donc l'équation à intégrer est $xddx = dx^2 + dy^2$.

CCX.

Maintenant que nous sommes les maîtres de supposer toujours

toujours que dans l'équation aucune différentielle n'eſt conſtante, il eſt à propos d'examiner ſi on ne pourroit pas au moins dans certains cas déterminer quelle eſt la différentielle qui priſe pour conſtante, rendra l'équation plus facile à intégrer.

CHAPITRE III.

Méthode pour déterminer, dans quelques cas, la différentielle qui ſuppoſée conſtante facilitera le plus l'intégration.

CCXI.

ON ne peut pas donner de regle générale pour reconnoître dans tous les cas quelle eſt la fluxion qu'on doit regarder comme conſtante, afin que l'intégration en devienne plus facile; on peut cependant ſe guider quelquefois par l'obſervation ſuivante. Je cherche ſi dans la propoſée il y a deux, trois, &c. termes qui multipliés ou diviſés par un facteur commun puiſſent s'intégrer. J'en prends l'intégrale, & c'eſt celle que je ſuppoſe conſtante.

CCXII.

Son application à quelques exemples.

Premier exemple.

Soit, par exemple, propoſé d'intégrer l'équation ſuivante $X = \frac{dy^3 + dx^2 dy - x dy ddx + x dx ddy}{2x^3 dy^3}$, dans laquelle X repréſente une fonction quelconque de x. J'obſerve

que dans cette équation les deux termes $dx^2 dy + x dx ddy$ diviſés par dx, donnent $dx dy + x ddy$, dont l'intégrale eſt $x dy$. Je vois encore que $dx^2 dy - x dy ddx$ diviſés par $- xx dy$, donnent $\frac{- dx^2 + x ddx}{xx}$; différentielle dont l'intégrale eſt $\frac{dx}{x}$. Je puis donc également ſuppoſer pour conſtantes $x dy$ & $\frac{dx}{x}$. Ces deux ſuppoſitions détruiront également deux termes.

Soit 1°. ſuppoſée $x dy$ égale à une conſtante c, on aura $x ddy + dy dx = 0$, & multipliant par dx, $x dx ddy + dy dx^2 = 0$; ce qui réduit la propoſée à l'équation ſuivante $X = \frac{dx^3 - x dy ddx}{2x^2 dy^3}$. Mais $x ddy + dx dy = 0$ donne $dy = \frac{- x ddy}{dx}$: donc en ſubſtituant pour dy cette valeur, on aura $X = \frac{- x dy^2 ddy}{2x^3 dx dy^3} - \frac{x dy ddx}{2x^3 dy^3}$, c'eſt-à-dire, $X = \frac{- x dy^2 ddy - x dy dx ddx}{2x^3 dx dy^3}$, ou $X = \frac{- dy^2 ddy - dy dx ddx}{2x^2 dx dy^3}$. Mais $x dy = c$: donc $dy = \frac{c}{x}$. Donc $X = \frac{- dy ddy - dx ddx}{2c^2 dx}$, ou $X dx = \frac{- dy ddy - dx ddx}{2cc}$, & en intégrant on a $\int X dx = \frac{- dy^2 - dx^2}{4cc} + n$. Donc enfin $\int X dx = \frac{- dy^2 - dx^2}{4x^2 dy^2} + n$.

CCXIII.

REMARQUE. Quand on eſt arrivé à l'équation $X = \frac{dy^3 - x dy ddx}{2x^3 dy^3}$, on peut abreger le calcul en multipliant l'équation par dx; ce qui donne $X dx = \frac{dx}{2x^3} - \frac{dx ddx}{2x^3 dy^2}$, dont l'intégrale eſt ($x dy$ étant conſtante) $\int X dx = - \frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4x^2 dy^2} + n$, qui eſt la même que la précédente.

CCXIV.

2°. Prenons à préſent pour conſtante $\frac{dx}{x}$; cette ſuppoſition nous donnera $\frac{x\,ddx - dx^2}{xx} = 0$, & en multipliant par $-xx\,dy$, on a $-x\,dy\,ddx + dx^2\,dy = 0$, équation qui fait évanouir le ſecond & le troiſieme terme de la propoſée. Elle devient donc $X = \frac{dy^4 + x\,dx\,ddy}{2x^3\,dy^3}$; je la multiplie par dx, ce qui me donne $Xdx = \frac{dx\,dy^3 + x\,dx^2\,ddy}{2x^3\,dy^3}$. L'intégrale de cette équation eſt, à cauſe de $\frac{dx}{x}$ ou $\frac{dx^2}{x^2}$ qui eſt conſtante, $\int X\,dx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4x^2\,dy^2} \pm C$; ainſi que nous l'avons trouvé ci-deſſus.

CCXV.

Soit propoſé d'intégrer l'équation ſuivante $xy \times (dx\,ddy - dy\,ddx) = y\,dy\,dx^2 - yy\,dY\,dy^2 - x\,dx\,dy^2$, dans laquelle Y repréſente une fonction quelconque de y.

Je remarque que dans cette équation il y a trois termes ſavoir $yx\,dy\,ddx + y\,dy\,dx^2 - x\,dx\,dy^2$ qui diviſés par $yy\,dy$ forment une différentielle complete, $\frac{yx\,ddx + y\,dx^2 - x\,dx\,dy}{yy}$, dont l'intégrale eſt $\frac{x\,dx}{y}$. Je prends donc pour conſtante $\frac{x\,dx}{y}$; ce qui me donne en différentiant $\frac{xy\,ddx + y\,dx^2 - x\,dx\,dy}{yy} = 0$. Donc la propoſée ſe réduit à $xy\,dx\,ddy + yy\,dY\,dy^2 = 0$, c'eſt-à-dire, $dY = -\frac{x\,dx\,ddy}{y\,dy^2}$, équation dont l'intégrale eſt $Y = \frac{x\,dx}{y\,dy} \pm C$; ce qui eſt évident, $\frac{x\,dx}{y}$ étant conſtante.

CHAPITRE IV.

Dans lequel on applique aux équations différentielles de tous les ordres la méthode de l'article qui apprend à intégrer ou conſtruire les équations différentielles du premier degré dans leſquelles l'une des indéterminées finies ne ſe trouve à aucun terme.

CCXVI.

Conditions que cette méthode exige.

NOus avons vu (Art. CXL.) que l'on pouvoit toujours intégrer ou conſtruire les équations différentielles du premier degré, lorſque l'une de leurs indéterminées finies ne s'y trouve pas; la méthode expoſée dans cet article s'étend encore aux équations différentielles de tous les ordres. Par exemple, lorſque dans une équation différentielle du ſecond ordre l'une ou l'autre des deux indéterminées ne s'y trouve pas, & qu'il n'y entre que ſes différences premieres ou ſecondes combinées comme on le veut, & élevées à des puiſſances quelconques, il ſera toujours poſſible de parvenir à la ſéparation. Le procédé qu'il faut ſuivre pour cela conſiſte à faire la premiere différence qui eſt variable, égale à la fluxion priſe pour conſtante, multipliée par une nouvelle indéterminée.

CCXVII.

Son application à plusieurs équations du second ordre.

Premier exemple.

Soit proposé d'intégrer l'équation $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2aydd x + adxdy}{du\,dy}$ dans laquelle $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ est supposé constant, & l'indéterminée finie u ne se trouve pas. Suivant ce que nous venons de dire, je fais $dx = z\,du$, ce qui me donne . . . . $ddx = dz\,du$. J'ai donc la transformée suivante $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2aydz\,du + azdudy}{du\,dy}$, & en réduisant $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2aydz + azdy}{dy}$, ou $\frac{by^m dy}{c^m} = 2aydz + azdy$. Je divise cette équation par $2\sqrt{y}$, elle devient $\frac{by^{m-\frac{1}{2}}dy}{2c^m} = adz\sqrt{y} + \frac{azdy}{2\sqrt{y}}$, équation dont l'intégrale est $\frac{by^{m+\frac{1}{2}}}{(m+\frac{1}{2})\cdot 2c^m} = az\sqrt{y} \pm C$. Mais $z = \frac{dx}{du}$; donc l'intégrale cherchée est $\frac{by^{m+\frac{1}{2}}du}{2mc^m + c^m} = adx\sqrt{y} \pm Cdu$.

CCXVIII.

Second exemple.

Soit maintenant l'équation à intégrer $Yyydydx^2 + duddu = 0$, dans laquelle Y représente une fonction de y, du est l'élément de la courbe, égal par conséquent à $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, ydx est la fluxion prise pour constante, & dans laquelle l'indéterminée u ne se trouve pas.

Je fais . . . . . $du = zydx$

$ddu = ydzdx$,

& après la substitution l'équation est $Yy^2dydx^2 =$

$-y^2zdzdx^2$, & en réduiſant $Ydy=-zdz$. L'intégrale de cette équation eſt $\int Ydy=-\frac{zz}{2}+C$. Mais $z^2=\frac{du^2}{yydx^2}=\frac{dx^2+dy^2}{yydx^2}$. Donc l'intégrale cherchée ſera $dx=\frac{dy}{\sqrt{(2Cyy-1-2yy\int Ydy)}}$.

CCXIX.

Autre maniere d'intégrer les équations précédentes.

REMARQUE. On peut encore réduire aux premieres différences les équations qui ſont dans le cas des précédentes, en ſe ſervant de la ſubſtitution que nous avons employée (Art. CXL.) pour les différentielles du premier degré. Cette ſubſtitution conſiſte à égaler la premiere différence de l'indéterminée qui manque, à une nouvelle indéterminée multipliée par la premiere différence de l'autre inconnue.

CCXX.

Appliquée à l'exemple précédent.

Je reprends l'équation précédente $Yy^2dydx^2+duddu=0$; je ſuppoſe $dx=zdu$, ce qui me donne $ddx=dzdu+zddu$, d'où l'on tire $ddu=\frac{ddx-dzdu}{z}$. Après avoir ſubſtitué les valeurs dans l'équation, elle devient $Yy^2z^2dydu^2=\frac{dzdu^2-duddx}{z}$. Mais par la ſuppoſition ydx eſt conſtant; donc $yddx+dydx=0$, donc $ddx=-\frac{dydx}{y}$, ou en mettant pour dx ſa valeur, $ddx=-\frac{zdudy}{y}$. Subſtituant dans la transformée cette valeur de ddx, on a $Yy^2z^2dydu^2=\frac{dzdu^2}{z}+\frac{zdydu^2}{zy}$, & en réduiſant $Yz^2y^2dy=\frac{dz}{z}+\frac{dy}{y}$. Soit maintenant $yz=t$,

on a $lyz = lt$, $\frac{ydz+zdy}{yz} = \frac{dt}{t}$, & $\frac{dz}{z} + \frac{dy}{y} = \frac{dt}{t}$. Donc $Yt^2 dy = \frac{dt}{t}$, & $Ydy = \frac{dt}{t^3}$, équation dont l'intégrale eſt $\int Y dy = -\frac{1}{2tt} \pm C$. Maintenant $tt = z^2y^2 = \frac{yydx^2}{du^2} = \frac{yydx^2}{dx^2+dy^2}$, à cauſe de $du = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Donc en remettant ces valeurs dans l'intégrale trouvée, on aura $2\int Y dy = \frac{-dx^2-dy^2}{yydx^2} \pm 2C$, & enfin $dx = \frac{dy}{\sqrt{(2Cyy-2y^2\int Ydy-1)}}$, équation que nous avions déja trouvée par l'autre méthode.

CCXXI.

Troiſieme exemple.

Soit encore propoſé d'intégrer l'équation $Yy^3 dy dx^3 = dx dy du^2 + y du^2 ddx - y dx du ddu$, dans laquelle je puis ſuppoſer conſtante la fluxion que je voudrai, Y eſt une fonction quelconque de y & de conſtantes.

Prenons d'abord dx conſtante, cette ſuppoſition donne $ddx = 0$, & fait diſparoître le terme $y du^2 ddx$. L'équation eſt donc $Yy^3 dy dx^2 = dy du^2 - y du ddu$. Pour la réduire je fais . . . . $du = z dx$,

$ddu = dz dx$,

d'où je tire la transformée ſuivante $Yy^3 dy dx^2 = z^2 dy dx^2 - yz dz dx^2$, & en diviſant par dx^2, $Yy^3 dy = z^2 dy - yz dz$, ou $Yy^3 dy = (\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}) \times z^2 y$. Pour intégrer cette équation je ſuppoſe $\frac{y}{z} = \frac{1}{t}$; je prends la différence du logarithme de cette équation, j'ai $\frac{\frac{zdy-ydz}{zz}}{\frac{y}{z}} = -\frac{\frac{dt}{tt}}{\frac{1}{t}}$,

& en réduisant $\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} = -\frac{dt}{t}$. Nous avons d'ailleurs $yt = z$. Donc en substituant ces valeurs dans l'équation $Yy^3 dy = (\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}).z^2 y$, elle devient $Yy^3 dy = -\frac{dt}{t} \times y^3 t^2$, ou bien $Ydy = -t\,dt$, équation dont l'intégrale est $\int Ydy = -\frac{tt}{2} \pm C$: mais $\frac{tt}{2} = \frac{zz}{2yy}$. Donc on a $\int Ydy = -\frac{zz}{2yy} \pm C$; & en mettant pour z sa valeur $\frac{du}{dx}$, on a $\int Ydy = -\frac{du^2}{2yydx^2} \pm C$.

Si on prend du constant, alors $ddu = 0$, & l'équation $Yy^3 dydx^3 = dxdydu^2 + ydu^2 ddx - ydxdu\,ddu$ devient $Yy^3 dydx^3 = dxdydu^2 + ydu^2 ddx$. Soit maintenant $dx = z\,du$, $ddx = dz\,du$, l'équation en y substituant ces valeurs devient $Yy^3 dy.z^3 du^3 = z\,dydu^3 + y\,dz\,du^3$, ou bien $Ydy = \frac{z\,dy + y\,dz}{y^3 z^3}$. Donc en intégrant on a $\int Ydy = \frac{-1}{2y^2 z^2} \pm C$, & en remettant pour z sa valeur $\frac{dx}{du}$, l'intégrale cherchée est $\int Ydy = \frac{-du^2}{2y^2 dx^2} \pm C$, la même que nous venons de trouver.

CCXXII.

Application de la méthode à des équations d'un ordre plus élevé que le second.

SCHOLIE 2. Cette méthode s'appliquera aux différentielles d'un ordre plus élevé que le second, pourvu que dans celles du troisieme ordre, par exemple, l'une & l'autre des deux variables finies x & y manquent, que dans celles du quatrieme, outre l'une des deux variables finies x, y, il manque encore l'une ou l'autre des premieres différences dx, dy avec leurs fonctions. On réduira par la même méthode les équations différentielles du cinquieme ordre, dans le cas où les deux variables finies x & y,

&

& leurs deux premieres différences dx, dy, manquent ; celles du ſixieme, pourvu qu'outre cela il manque encore l'une ou l'autre des ſecondes différences ddx, ou ddy, & ainſi de ſuite.

CCXXIII.

1°. A une équation du troiſieme ordre.

Soit l'équation $dx\,d^3y + dx^2\,d^2y = dx^4 + dy^4$, ſuſceptible, comme on le voit, de la méthode préſente, puiſque les deux indéterminées finies x & y ne s'y trouvent pas ; dx eſt conſtant dans cette équation. Je fais

$$\frac{p\,dx}{a} = dy$$

& par conſéquent . . . . . $\frac{dp\,dx}{a} = ddy$

$$\frac{ddp\,dx}{a} = d^3y.$$

Après avoir ſubſtitué ces valeurs dans la propoſée, elle devient $\frac{dx^3\,ddp}{a} + \frac{dx^3\,dp}{a} = dx^4 + \frac{p^4\,dx^4}{a^4}$; donc $\frac{ddp + dx\,dp}{a} = dx^2 + \frac{p^4\,dx^2}{a^4}$, équation réduite au ſecond ordre.

Suppoſant toujours dx conſtant, je fais $\frac{q\,dx}{b} = dp$, ce qui me donne . . . . . $\frac{dq\,dx}{b} = ddp$: j'ai après la ſubſtitution, $\frac{dq\,dx}{ab} + \frac{dp\,dx}{a} = dx^2 + \frac{p^4\,dx^2}{a^4}$, ou $\frac{dq}{ab} + \frac{dp}{a} = dx + \frac{p^4\,dx}{a^4}$: mais $dx = \frac{b\,dp}{q}$; donc on a $\frac{b\,dp + dq}{ab} = \frac{b\,dp}{q} + \frac{bp^4\,dp}{a^4q}$, équation réduite aux premieres différences.

CCXXIV.

2°. A une équation du quatrieme.

Soit maintenant l'équation différentielle du quatrieme ordre $d^4y + dx\,d^3y - dx^2\,d^2y = 0$, dans laquelle dx

est constant, & les deux indéterminées finies x, y, avec la premiere différence dy ne se trouvent pas. Je suppose donc . . . . . $\frac{p\,dx}{a} = dy$,

& par conséquent . . . . . $\frac{dp\,dx}{a} = ddy$

$\frac{d^2p\,dx}{a} = d^3y$

$\frac{d^3p\,dx}{a} = d^4y$;

donc en substituant pour ddy, d^3y, d^4y ces valeurs, j'aurai la transformée suivante $d^3p + dx\,d^2p - dx^2dp = 0$, équation qui est dans le cas de celle de l'exemple précédent; donc en opérant comme nous venons de faire, on la ramenera aux premieres différences.

CCXXV.

Cas particuliers qui se ramenent aux précédents par le choix de la constante.

SCHOLIE 3. Parmi les équations qui ne sont pas susceptibles de la méthode précédente, parce que les deux indéterminées finies s'y trouvent, il y en a quelques-unes qu'on y peut ramener en prenant pour constante une différentielle telle que tous les termes affectés de l'une des deux indéterminées finies disparoissent, & qu'il ne reste que ceux qui contiennent l'autre.

Dans ce cas est l'équation suivante $dx^3 - dx\,dy^2 = y\,dx\,ddx + 2x\,dy\,ddy$, dans laquelle nous pouvons supposer constant ou dx, ou dy. Si nous faisons la premiere supposition, nous aurons $ddx = 0$, & par conséquent le terme $y\,dx\,ddx$ s'évanouit; si c'est dy que nous traitons comme constant, $ddy = 0$ fait disparoître

le terme $2xdyddy$; donc dans l'une & l'autre ſuppoſition il ne reſte que l'une des deux indéterminées finies.

Soit donc dx conſtant, on aura $dx^3 - dxdy^2 = 2xdyddy$. Je fais . . . . . $dy = \frac{pdx}{a}$

$$ddy = \frac{dpdx}{a};$$

donc en ſubſtituant j'aurai $dx^3 - \frac{p^2dx^3}{aa} = \frac{2xpdpdx^2}{aa}$, c'eſt-à-dire $aadx - ppdx = 2xpdp$, ou $\frac{dx}{x} = \frac{2pdp}{aa-pp}$. Donc en intégrant on a $lx = -l(aa-pp) + lm$, & $x = \frac{m}{aa-pp}$. Je remets pour p ſa valeur $\frac{ady}{dx}$, j'ai $x = \frac{m}{aa - \frac{aady^2}{dx^2}}$, & par conſéquent $x = \frac{mdx^2}{aadx^2 - aady^2}$, ou enfin $aady^2 = aadx^2 - \frac{mdx^2}{x}$.

CCXXVI.

Autres cas particuliers qui s'y ramenent par de ſimples ſubſtitutions.

D'autres cas ſe rameneront à notre méthode par de ſimples ſubſtitutions. Soit, par exemple, $x^m ddx = yddy + dy^2 + yydy^2$, je fais $ydy = dz$, d'où je tire,

$$yddy + dy^2 = ddz$$
$$yydy^2 = dz^2.$$

Donc en ſubſtituant ces valeurs on aura pour transformée l'équation $x^m ddx = ddz + dz^2$, dans laquelle l'une des deux indéterminées finies z ne ſe trouve pas.

CCXXVII.

Il y a encore un autre cas plus général que les précédents; c'eſt celui dans lequel on n'a que des ddy, des

dy & des dx : car alors en faiſant $dy = z\,dx$, dx étant conſtant, l'équation, comme il eſt évident, ſe ramenera toujours aux premieres différences. Maintenant nous allons expoſer une méthode générale pour ramener à notre dernier cas un très-grand nombre d'équations différentielles.

CHAPITRE V.

Méthode pour transformer un grand nombre d'équations différentielles qui renferment leurs deux indéterminées finies, en d'autres dans leſquelles l'une des deux ne ſe trouve pas.

CCXXVIII.

Fondement de cette méthode.

LA méthode que nous allons expliquer eſt fondée ſur le principe du calcul des exponentielles. Si l'on a une quantité telle que c^x, dans laquelle c déſigne un nombre dont le logarithme eſt l'unité, ſa différentielle ſera, comme nous l'avons vu dans l'Introduction, $c^x\,dx$, ſa ſeconde différence $c^x\,ddx + c^x\,dx^2$, ſa différence troiſiéme $c^x d^3x + 3\,c^x\,dx\,ddx + c^x\,dx^3$, & ainſi de ſuite. Or dans ces différentielles l'indéterminée finie x ne ſe trouve que dans l'expoſant. Cette conſidération fit penſer à M. Euler qui eſt l'inventeur de cette méthode, que ſi dans les équations différentielles d'un ordre plus élevé que le premier, on ſubſtituoit aux indéterminées des exponentielles telles que

les précédentes, les variables finies ne ſe trouveroient plus qu'aux expoſants. La difficulté ſeroit alors réduite à faire évanouir les exponentielles introduites à la place des variables. Car par ce moyen l'équation ſera délivrée de l'une de ſes indéterminées, dont il ne reſtera que les différences.

CCXXIX.

Trois cas généraux auxquels s'applique cette méthode.

La méthode réuſſira pour toutes les équations différentielles du ſecond ordre qui ſont dans un des trois cas ſuivants.

1°. Pour celles qui n'ont que deux termes & qui ſont compriſes dans la formule ſuivante,

$$ax^m dx^p - y^n dy^{p-2} ddy = 0.$$

2°. Pour toutes les équations dans leſquelles les indéterminées & leurs différences ont le même nombre de dimenſions dans chaque terme. La formule ſuivante peut les repréſenter :

$$ax^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + bx^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} = ddy.$$

3. Pour les équations dans leſquelles l'une des deux variables avec ſes différences a le même nombre de dimenſions dans chaque terme. Mais il faut diſtinguer deux cas; le premier, quand la premiere différentielle de l'indéterminée qui a par-tout le même nombre de dimenſions eſt conſtante; & ce cas peut ſe repréſenter par la formule,

$$Px^m dy^{m+2} + Qx^{m-h} dx^h dy^{m+2-h} = dx^m ddy,$$

dans laquelle x a dans tous les termes le nombre m de dimenſions, dx eſt conſtante; P & Q ſont des fonctions

quelconques de y. Le ſecond cas arrive lorſque c'eſt la premiere différentielle de l'autre variable, qui eſt conſtante, & ce dernier eſt compris dans la formule,

$Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-h} dx^h dy^{m-h+1} = dx^{m-1} ddx$,

dans laquelle dy eſt conſtant, P & Q ſont des fonctions de y, x a, comme on le voit, dans chaque terme le nombre m de dimenſions.

Nous allons examiner ſéparément les quatre formules précédentes.

CCXXX.

Examen du premier cas de la méthode.

PROBLEME I. Intégrer les équations telles que $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$, dans laquelle dx eſt conſtant.

SOLUTION. Soit . . . . . $x = c^{hu}$

& . . . . . $y = c^u t$,

h eſt une quantité arbitraire qu'on déterminera dans la ſuite de l'opération, u & t ſont deux nouvelles variables.

La ſuppoſition de $x = c^{hu}$ & de $y = c^u t$, nous donne

$dx = hc^{hu} du$

$ddx = hc^{hu} \times (ddu + hdu^2)$

$dy = c^u dt + c^u t du$

$ddy = c^u \times (ddt + 2dtdu + tdu^2 + tddu)$.

Mais par l'hypotheſe dx eſt conſtant; on aura donc $ddx = 0$, donc auſſi $hc^{hu} \times (ddu + hdu^2) = 0$, c'eſt-à-dire, $ddu = -hdu^2$ & en ſubſtituant pour ddu cette valeur dans celle de ddy, on a

$ddy = c^u \times (ddt + 2dtdu + (1-h) tdu^2)$.

Subſtituons dans la propoſée pour x, y, &c. leurs valeurs, elle devient $ac^{hmu}h^p c^{hpu}du^p = c^{nu}t^n \times (c^u dt + c^u t du)^{p-2} \times c^u (ddt + 2dtdu + (1-h)tdu^2)$, c'eſt-à-dire, $ac^{(m+p)hu}h^p du^p = c^{(n+p-1)u}t^n \times (dt + tdu)^{p-2} \times (ddt + 2dtdu + (1-)tdu^2)$.

Maintenant il s'agit de déterminer h, de maniere que les exponentielles s'évanouiſſent. Or pour cela on voit bien qu'il faut que $n+p-1 = hm+hp$, ce qui donne $h = \frac{n+p-1}{m+p}$; donc l'équation précédente devient (B) $a\left\{\frac{(n+p-1)^p du^p}{(m+p)^p}\right\} = t^n : (dt + tdu)^{p-2} \times (ddt + 2dtdu + (\frac{m-n+1}{m+p})tdu^2)$, laquelle ne contient plus qu'une des variables finies, ſavoir t, & ſe trouve par conſéquent réduite au cas du Chapitre précédent.

Puiſqu'on trouve $h = \frac{n+p-1}{m+p}$, il eſt facile de voir que les ſubſtitutions à faire ſont $x = c^{(\frac{n+p-1}{m+p})u}$ & $y = c^u t$, dans leſquelles on obſervera que $n+p-1$ eſt la ſomme des dimenſions de y, & $m+p$, celle des dimenſions de x. Cette remarque doit ſervir à déterminer ſur le champ dans les cas particuliers la valeur qu'on doit donner à h.

CCXXXI.

Appliquons maintenant à la formule réduite la méthode de l'Art. CCXVI. Soit $du = zdt$, on aura $ddu = dzdt + zddt$; mais la ſuppoſition de dx conſtant, nous a donné plus haut $ddu = -hdu^2$: on aura donc en mettant pour h, & pour du leurs valeurs, $ddu =$

$(\frac{1-n-p}{m+p})\,zz\,dt^2$: donc $(\frac{1-n-p}{m+p})\,zz\,dt^2 = z\,ddt + dz\,dt$, d'où l'on tire $ddt = (\frac{1-n-p}{m+p})\,z\,dt^2 - \frac{dt\,dz}{z}$. Je substitue dans l'équation (B) les valeurs de du & de ddt, j'ai $a(\frac{n+p-1}{m+1})^p\,az^p\,dt^p = t^n.(dt+zt\,dt)^{p-2} \times \{(\frac{1-n-p}{m+p})\,z\,dt^2 - \frac{dt\,dz}{z} + 2z\,dt^2 + (\frac{m-n+1}{m+p})\,zz\,dt^2\}$, ou bien en divisant par dt^{p-1}, & multipliant par z, on aura (D) $(\frac{n+p-1}{m+p})^p\,z^{p+1}\,dt = t^n \times \{(1+tz)^{p-2} \times (\frac{1+2m-n+p}{m+p})\,zz\,dt + (\frac{m-n+1}{m+p})\,tz^2\,dt - dz\}$, équation réduite aux premieres différences.

La supposition de $du = z\,dt$ & la valeur $\frac{n+p-1}{m+p}$ trouvée pour h, nous apprennent que pour réduire sur le champ l'équation proposée, il falloit faire $x = c^{(\frac{n+p-1}{m+p})\int z\,dt}$

& . . . . . $y = c^{\int z\,dt}\,t$,

ou, ce qui revient au même, $x = c^{(n+p-1)\int z\,dt}$

& . . . . . $y = c^{(m+p)\int z\,dt}\,t$,

CCXXXII.

COROLL. De ce que nous supposons $x = c^{(n+p-1)\int z\,dt}$, il s'ensuit que $c^{\int z\,dt} = x^{\frac{1}{n+p-1}}$; donc $\int(z\,dt)\,lc = \frac{1}{n+p-1}\,lx$; donc à cause de $lc = 1$, $z\,dt = \frac{dx}{(n+p-1)\,x}$. mais la supposition de $y = c^{(m+p)\int z\,dt}\,t$, nous donne $ly = (m+p)\int(z\,dt)\,lc + lt$; donc en mettant pour $\int z\,dt$ sa valeur en x, on a $ly = (\frac{m+p}{n+p-1})\,lx + lt$; donc $y = x^{\frac{m+p}{n+p-1}}\,t$, & $t = y\,x^{\frac{-m-p}{n+p-1}}$; donc $dt =$

$x^{\frac{-m-p}{n+p-1}} dy - (\frac{m+p}{n+p-1}) \times yx^{-(\frac{m+n+2p-1}{n+p-1})} dx$. Donc en mettant pour dt cette valeur dans l'équation $z dt = \frac{dx}{(n+p-1)x}$, on aura $z x^{\frac{-m-p}{n+p-1}} dy - (\frac{m+p}{n+p-1}) yzx^{-(\frac{m+n-2p-1}{n+p-1})} dx = \frac{dx}{(n+p-1)x}$; donc enfin $z = \frac{dx}{(n+p-1)x^{\frac{n-m-1}{n+p-1}} dy - (m+p) yx^{-(\frac{m-3p}{n+p-1})} dx}$.

Donc il eſt évident que ſi nous avons la valeur de z en t, ou celle de t en z, on pourra trouver le rapport de x à y.

Appliquons la méthode précédente à quelques exemples particuliers.

CCXXXIII.

Application de la formule à deux exemples particuliers.

Soit l'équation $x dx dy = y ddy$ dans laquelle dx eſt conſtant. Comparant cette équation avec la formule, j'ai

$$a = 1$$
$$m = 1$$
$$p = 1$$
$$n = 1;$$

Mettant donc ces valeurs dans l'équation différentielle du premier degré (D) trouvée plus haut, on a $\frac{zz dt}{2} = t(1+tz)^{-1} \times (\frac{1}{2} z^2 dt + \frac{1}{2} tz^3 dt - dz)$; ou en réduiſant $z^2 dt + tz^3 dt = 3tz^2 dt + z^3 t^2 dt - 2t dz$.

CCXXXIV.

Soit encore propoſé de réduire aux premieres différences l'équation $\frac{a dx}{x} = \frac{ddy}{ydy}$, dans laquelle dx eſt conſtant. Comparant cette équation avec notre formule, on trouve

$$p = 1$$
$$n = -1$$
$$m = -1;$$

on auroit donc dans le cas préſent $p+m=0$, donc tous les termes de l'équation réduite ſeroient infinis, & par conſéquent la méthode ne peut ſervir dans ce cas.

Mais alors l'intégration eſt facile. Car on a $x\,ddy = aydydx$; mais dx conſtant donne $ddx=0$: donc l'intégrale du premier membre eſt $xdy-ydx$, & celle du ſecond eſt $\frac{ayydx}{2}$. Donc on aura $\frac{xdy-ydx}{yy} = \frac{adx}{2} + Cdx$.

CCXXXV.

Seconde partie de la méthode.

PROBLEME 2. Intégrer les équations qui ſe rapportent à la formule générale $ax^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + bx^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} = ddy$, dans laquelle dx eſt conſtant.

SOLUTION. Soit . . . . . $x = c^u$

$$y = c^u t$$

j'aurai . . . . . $dx = c^u du$,

& comme dx eſt conſtant, $c^u\,ddu + c^u du^2 = 0$; c'eſt-à-dire, $ddu = -du^2$, on a auſſi

$$dy = c^u dt + c^u t\,du$$
$$ddy = c^u.(ddt + 2\,dudt + t\,du^2 + t\,ddu),$$

& à cauſe que nous avons $ddu = -du^2$,

$$ddy = c^u.(ddt + 2\,dudt).$$

Subſtituant ces valeurs dans la formule, elle devient $ddt + 2\,dudt = at^{-m-1} du^p \times (dt+t\,du)^{2-p} + bt^{-n-1} du^q.(dt+t\,du)^{2-q}$, équation dans laquelle ne ſe trouve pas l'indéterminée finie u.

Je ſuppoſe donc $du = z\,dt$, ce qui me donne $ddu = dz\,dt + z\,ddt$. Mais $ddu = -du^2 = -zz\,dt^2$; donc $ddt = -\frac{dz\,dt}{z} - z\,dt^2$. Donc on aura l'équation ſuivante $at^{-m-1}z^p\,dt^p.(dt+zt\,dt)^{2-p} + bt^{-n-1}z^q\,dt^q.(dt+zt\,dt)^{2-q} = -\frac{dz\,dt}{z} + z\,dt^2$, ou bien (A) $at^{-m-1}z^p\,dt.(1+zt)^{2-p} + bt^{-n-1}z^q\,dt.(1+zt)^{2-q} = -\frac{dz}{z} + z\,dt$, équation différentielle du premier ordre : d'où je conclus que je pouvois réduire tout de ſuite la propoſée en faiſant . . . . . $x = c^{\int z\,dt}$

$y = c^{\int z\,dt}\,t$.

Ces deux ſuppoſitions nous donnent $dx = c^{\int z\,dt}\,z\,dt$ & $dy = c^{\int z\,dt}\,dt + c^{\int z\,dt}\,zt\,dt$; donc $ddx = c^{\int z\,dt} \times (z\,ddt + dz\,dt + zz\,dt^2)$: mais dx étant conſtant, $ddx = 0$, donc $z\,ddt + dz\,dt + zz\,dt^2 = 0$, & $ddt = -z\,dt^2 - \frac{dz\,dt}{z}$, & par conſéquent on aura $ddy = c^{\int z\,dt} \times (z\,dt^2 - \frac{dz\,dt}{z})$.

Appliquons cette formule à quelques exemples.

CCXXXVI.

Application à un exemple.

Soit l'équation $x\,dx\,dy - y\,dx^2 = yy\,ddy$. Pour la comparer avec la formule, je l'écris ainſi $xy^{-2}\,dx\,dy - y^{-1}\,dx^2 = ddy$. J'ai donc . . . . $a = 1$

$m = 1$

$p = 1$

$n = 0$

$b = -1$

$q = 2$.

Subſtituant ces valeurs dans l'équation (A) elle devient $t^{-2}zdt \times (1+zt) - t^{-1}zzdt = -\frac{dz}{z} + zdt$, ou $\frac{zdt+zztdt}{tt} - \frac{zzdt}{t} = -\frac{dz+zzdt}{z}$; ou $zzdt + z^3tdt - z^3tdt = -ttdz + zzttdt$. Donc en réduiſant on a $zzdt - zzttdt = -ttdz$. Donc $dt - \frac{dt}{tt} = \frac{dz}{zz}$, & en intégrant $t + \frac{1}{t} = -\frac{1}{z} + C$; c'eſt-à-dire $ttz + z = -t + Ctz$. Mais par les ſubſtitutions $z = \frac{du}{dt}$; donc l'équation $Ctz - t = ttz + z$ devient ici $Ctdu - tdt = ttdu + du$, ou (E) $du = \frac{tdt}{Ct - tt - 1}$. D'un autre côté la ſuppoſition de $c^u = x$ donne $ulc = lx$, & à cauſe que $lc = 1$, $du = \frac{dx}{x}$; on aura auſſi $y = c^u t = xt$, donc $t = \frac{y}{x}$, $dt = \frac{xdy - ydx}{xx}$. Subſtituons dans (E) pour du, dt, t leurs valeurs, on aura $ydy + xdx = Cydx$, équation au cercle dans le cas où $C = 0$.

CCXXXVII.

SCHOLIE. La formule que nous venons de traiter dans le Problême précédent n'a que trois termes : on pourroit y en ajouter tant d'autres qu'on voudroit, pourvu toutesfois qu'ils euſſent les conditions énoncées Art. CCXXIX. Pour ne laiſſer aucun doute ſur cet article, nous allons appliquer la méthode à un exemple qui a plus de trois termes.

Autre exemple dans lequel l'équation a plus de trois termes.

Soit propoſée l'équation ſuivante $y^2dx^3 + x^2dy^3 - yxdxdy^2 - yxdydx^2 + yx^2dxddy - xy^2dxddy = 0$, dans laquelle dx eſt conſtant. Je ſuppoſe, ainſi que

je l'ai fait plus haut, ... $x = c^u$

$$y = c^u t,$$

j'aurai . . . . . $dx = c^u du$

$$dy = c^u.(dt + t du),$$

& à cauſe que $ddx = 0$, $ddy = c^u \times (ddt + 2 du dt)$. Je ſubſtitue pour x, y, dx, dy, ddy leurs valeurs dans l'équation, je trouve la transformée ſuivante après les réductions ordinaires (F) $dt^3 + 2tdudt^2 - ttdtdu^2 + tdtdu^2 + tdudt - ttdudt = 0$, dans laquelle on voit bien que l'indéterminée finie u ne ſe trouve pas.

Je fais donc . . . . . $du = zdt$,

j'en tire $ddu = dzdt + zddt$, ou parce que $ddx = 0$ donne $ddu = -du^2$, $-du^2 = dzdt + zddt$, donc. $ddt = -zdt^2 - \frac{dzdt}{z}$. Donc enfin après avoir ſubſtitué ces valeurs dans (F), on aura la réduite $dt + 2tzdt - tdz + ttdz = 0$, ou bien $(tt - t)dz + 2ztdt + dt = 0$, équation réduite au cas général du Chapitre VII.

Si on applique à cette équation les regles que nous avons données dans ce Chapitre, on trouvera pour ſon intégrale $(t-1)^2 z + t - lt = C$.

Cherchons maintenant au moyen de cette intégrale le rapport de x à y. La ſuppoſition de $du = zdt$ donne $z = \frac{du}{dt}$; donc l'intégrale trouvée devient $(t+1)^2 du + tdt - dtlt = Cdt$, ou $du = \frac{Cdt - tdt + dtlt}{(t-1)^2}$, équation dont l'intégrale eſt en ajoutant la conſtante A, (G) $u = \frac{t - C - tlt + At - A}{t-1}$. Mais la ſuppoſition de $x = c^u$ donne $u = lx$, & comme on ſuppoſe auſſi $y = c^u t$, on

aura $y = tx$, & $t = \frac{y}{x}$. Donc l'intégrale (G) devient $lx = \frac{y - Cx - yly + ylx - Ax + Ay}{y - x}$. Donc $ylx - xlx = y - Cx - yly + ylx - Ax + Ay$. Donc enfin en réduisant & supposant . . $-C - A = m$

& . . . . . $A + 1 = n$,

on a . . . . . $mx + ny = yly - xlx$.

CCXXXVIII.

Troisieme partie de la méthode.

Comprend deux cas.

La troisieme partie de la méthode comprend, ainsi que nous l'avons dit plus haut, toutes les équations dans lesquelles l'une des deux variables avec ses différences a dans chaque terme le même nombre de dimensions. Nous avons dit aussi qu'il falloit distinguer deux cas; le premier, quand on a pour constante la premiere différence de l'indéterminée qui a le même nombre de dimensions à tous les termes; le second lorsque c'est la premiere différence de l'autre indéterminée qui est constante. Nous traiterons ces deux cas séparément.

CCXXXIX.

Premier cas représenté par la formule $Px^m dy^{m+2} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m+2-n} = dx^m ddy$.

PROBLEME 3. Intégrer les équations représentées par la formule $Px\ dy^{m+2} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m+2-n} = dx^m ddy$, dans laquelle la somme des exposants de x & de dx est m dans tous les termes, dx est constant & P, Q sont des fonctions quelconques de y.

SOLUTION. Je suppose . . . . . $x = c^u$,

ce qui me donne . . . . . $dx = c^u du$

& . . . . . $ddu = -du^2$; je ſubſtitue ces valeurs dans la formule, & je la diviſe par c^{mu}, qui ſe trouve à tous les termes, j'ai la transformée (*I*) $Pdy^{m+2} + Qdu^n dy^{m+2-n} = du^m ddy$, laquelle ne contient point u.

Je fais donc $du = zdy$, $ddu = dzdy + zddy$: mais $ddu = -du^2$ & $du^2 = zzdy^2$; donc $zddy + dzdy = -zzdy^2$, & par conſéquent $ddy = -zdy^2 - \frac{dzdy}{z}$. Donc en ſubſtituant ces valeurs l'équation (*I*) devient $Pdy^{m+2} + Qz^n dy^{m+2} = -z^{m+1} dy^{m+2} - z^{m-1} dy^{m+1} dz$, & diviſant par dy^{m+1}, (*L*) $Pdy + Qz^n dy = -z^{m+1} dy - z^{m-1} dz$, équation réduite aux premieres différences. Il eſt évident qu'on auroit réduit tout de ſuite la propoſée, ſi on eût fait $x = c^{\int z dy}$. Cette ſuppoſition nous eût donné $dx = c^{\int z dy} zdy$, $ddx = c^{\int z dy} . (dzdy + zddy + z^2 dy^2)$: or $ddx = 0$, donc on auroit eu $ddy = -zdy^2 - \frac{dzdy}{z}$, comme on l'a trouvé plus haut.

Appliquons cette formule à un cas particulier qui ait plus de trois termes. Application de la formule à un exemple.

CCXL.

Qu'on ait à intégrer l'équation $2adx^2 dy + axdxddy = 2xdxdy^2 + 2xxdyddy$, dans laquelle dx eſt conſtant. Soit . . . . . $x = c^{\int z dy}$

$$dx = c^{\int z dy} zdy$$

. . . . . $ddy = -zdy^2 - \frac{dzdy}{z}$.

Subſtituons pour x, dx, ddy, ces valeurs dans l'équation, elle devient $2ac^{2\int z\,dy}z^2\,dy^3 - ac^{2\int z\,dy}z^2\,dy^3 - ac^{2\int z\,dy}\,dz\,dy^2 = 2c^{2\int z\,dy}z\,dy^3 - 2c^{2\int z\,dy}z\,dy^3 - \frac{2c^{2\int z\,dy}\,dz\,dy^2}{z}$, & en diviſant par $c^{2\int z\,dy}\,dy^2$ qui ſe trouve à tous les termes, on a après la réduction $az^2\,dy - a\,dz = -\frac{2\,dz}{z}$, ou bien $a\,dy = \frac{az\,dz - 2\,dz}{z^3}$. L'intégrale de cette équation eſt $ay = -\frac{a}{z} + \frac{1}{zz} + C$. Maintenant la ſuppoſition $x = c^{\int z\,dy}$ nous donne $lx = \int z\,dy$, & $\frac{dx}{x} = z\,dy$: donc $z = \frac{dx}{x\,dy}$. Remettant dans l'intégrale pour z cette valeur, nous aurons l'équation réduite

$$ay\,dx^2 = x\,x\,dy^2 - ax\,dx\,dy + C\,dx^2.$$

Je paſſe au ſecond cas.

CCXLI.

Second cas repréſenté par la formule $Px^m\,dy^{m+1} + Qx^{m-n}\,dx^n\,dy^{m-n+1} = dx^{m-1}\,ddx$,

PROBLEME 4. Intégrer les équations contenues dans la formule $Px^m\,dy^{m+1} + Qx^{m-n}\,dx^n\,dy^{m-n+1} = dx^{m-1}\,ddx$, dans laquelle dy eſt conſtant, P & Q ſont des fonctions de y.

SOLUTION. Je fais comme ci-deſſus $x = c^u$

$$dx = c^u\,du$$
$$ddx = c^u.(ddu + du^2).$$

Suivant ces ſubſtitutions dans la formule, nous aurons $(M)\ Pdy^{m+1} + Qdu^n\,dy^{m-n+1} = du^{m+1} + du^{m-1}\,ddu$ laquelle ne contient plus u. Nous avons diviſé par c^{mu} qui multiplioit tous les termes.

Je ſuppoſe donc . . . . . $du = z\,dy$

dy

dy étant conſtant, on a . . . . . $ddu = dzdy$, & ſubſtituant ces valeurs dans l'équation (M), elle devient $Pdy^{m+1} + Qz^n dy^{m+1} = z^{m+1} dy^{m+1} + z^{m-1} dy^m dz$, & en diviſant par dy^m, $Pdy + Qz^n dy = z^{m+1} dy + z^{m-1} dz$, équation différentielle du premier ordre à laquelle on parviendroit ſur le champ en faiſant $x = c^{\int z dy}$.

Je paſſe à un exemple.

CCXLII.

Application de cette formule à un exemple.

Soit propoſé de réduire aux premieres différences l'équation $2dxdy = addx - yddx$, dans laquelle dy eſt conſtant. Je fais $x = c^{\int z dy}$

$$dx = zdyc^{\int z dy}$$

$$ddx = c^{\int z dy} \times (z^2 dy^2 + zd^2 y + dzdy).$$

Mais comme dy eſt conſtant, $ddy = 0$, donc $ddx = c^{\int z dy} \times (zdy^2 + dzdy)$. Faiſant ces ſubſtitutions dans la propoſée, nous aurons $2zdy^2 = azzdy^2 + adzdy - zzydy^2 - ydydz$; & diviſant par dy, $2zdy = azzdy + adz - zzydy - ydz$, équation réduite aux premieres différences.

CCXLIII.

REMARQUE. Cette équation nous a ſervi pour faire voir l'application de notre méthode; mais on peut la réduire tout de ſuite: car on a $2dxdy + yddx = addx$, dont l'intégrale dy étant conſtant, $ydx + xdy = adx + Cdy$.

CHAPITRE VI.

Application de la méthode du Chapitre XV. aux équations différentielles d'un ordre plus élevé que le premier.

CCXLIV.

Conditions que cette méthode exige.

NOus avons vu (Chap. XV.) comment, au moyen des coefficiens indéterminés, on intégroit un nombre n d'équations différentielles du premier ordre qui renferment un nombre n d'indéterminées x, y, z, u, &c. multipliées par des conſtantes & par une même fonction de t, avec leurs différentielles $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{du}{dt}$, &c. auſſi multipliées par des conſtantes & par une fonction de t qui ſoit la même pour toutes, & de plus une fonction quelconque θ, θ', &c. de la variable t. Cette même méthode s'étend aux différentielles d'un ordre plus élevé que le premier.

Si l'on a un nombre n d'équations différentielles contenant un nombre n de changeantes x, y, z, &c. multipliées par des conſtantes & par une fonction quelconque θ de t avec leurs différences $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, auſſi multipliées par des conſtantes & par θ; & les différences ſecondes $\frac{ddx}{dt^2}, \frac{ddy}{dt^2}$, &c. multipliées de même par des conſtantes & par θ, & ainſi de ſuite juſqu'aux différences

$\frac{d^r x}{dt^r}$, $\frac{d^r y}{dt^r}$, $\frac{d^r z}{dt^r}$ d'un degré quelconque r; que de plus chacune de ces équations contienne, ſi l'on veut, une fonction quelconque θ', θ'' de t; voici la méthode qu'il faudra ſuivre pour parvenir à l'intégration.

CCXLV.

Procédé de la méthode.

On fera . . . . . $d^{r-1}x = u dt^{r-1}$

$d^{r-2}x = u' dt^{r-2}$

$d^{r-1}y = u'' dt^{r-1}$

$d^{r-2}y = u'' dt^{r-2}$, &c.

Par ces ſubſtitutions on changera les équations données en d'autres équations qui ſeront au nombre de $n + (n-1)r$, & qui ne contiendront que les indéterminées x, y, z, &c. u, u', u'', u''', &c. avec leurs premieres différences ſeulement dx, dy, dz, du, du', du'', du'''. Ces équations alors s'intégreront en les multipliant toutes excepté la premiere, par des coefficients indéterminés différents, & pratiquant enſuite les autres opérations que preſcrit la méthode du Chapitre XV. Nous allons appliquer ces principes à quelques exemples.

CCXLVI.

Son application à des exemples.

Premier exemple.

Soit $n = 2$, $r = 4$, enſorte qu'on ait à intégrer les deux équations ſuivantes $d^4y + b d^3y dt + c d^2y dt^2 + e dy dt^3 + f dx dt^3 + g d^2x dt^2 + h d^3x dt + i d^4x + \ell dt^4 = 0$, & $d^4y + \epsilon d^3y dt + \varkappa d^2y dt^2 + \iota dy dt^3 +$

$\varphi dx dt^3 + \gamma d^2x dt^2 + \lambda d^3x dt + \mu d^4x + \tau dt^4 = 0.$

Je ſuppoſe alors . . . . . $d^3y = z dt^3$

$d^2y = p dt^2.$

$dy = q dt$

$d^3x = u dt^3.$

$d^2x = r dt^2$

$dx = s dt,$

z, p, q, r, s, u étant de nouvelles indéterminées. Faiſant dans les deux équations propoſées les transformations précédentes, on a $dt^3 dz + bz dt^4 + cp dt^4 + eq dt^4 + fs dt^4 + gr dt^4 + hu dt^3 + i dt^3 du + \theta dt^4 = 0$, & $dt^3 dz + \epsilon z dt^4 + \varkappa p dt^4 + \iota q dt^4 + \varphi s dt^4 + \gamma r dt^4 + \lambda u dt^4 + \mu dt^3 du + \tau dt^4 = 0$. Mais au lieu de $d^3y = z dt^3$ on peut mettre $dp = z dt$; au lieu de $d^2y = p dt^2$, $dq = p dt$; au lieu de $d^3x = u dt^3$, $dr = u dt$; au lieu de $d^2x = r dt^2$, $ds = r dt$. Donc on aura les huit équations ſuivantes :

$dz + i du + (bz + cp + eq + fs + gr + hu + \theta) dt = 0$

$dz + \mu du + (\epsilon z + \varkappa p + \iota q + \varphi s + \gamma r + \lambda u + \tau) dt = 0$

$dx - s dt = 0$

$dy - q dt = 0$

$ds - r dt = 0$

$dq - p dt = 0$

$dr - u dt = 0$

$dp - z dt = 0.$

Les équations ſont réduites à l'état qu'exige la méthode du Chapitre XV. il eſt maintenant facile de la leur appliquer.

CCXLVII.

Soit encore l'équation $\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{bddy}{dt^2} + \frac{cdy}{dt} + Ky + T = 0$, T étant une fonction de t. Je mets l'équation ſous cette forme $d^3y + bd^2ydt + cdydt^2 + Kydt^3 + Tdt^3 = 0$, & j'ai $n = 1$, $r = 3$. Je fais donc $ddy = xdt^2$, $dy = zdt$; différentiant cette derniere équation, & ſuppoſant dt conſtant, on aura $ddy = dzdt$; donc $dzdt = xdt^2$ ou $dz = xdt$. Donc nous aurons les deux équations ſuivantes . . . . . $dz - xdt = 0$, $dy - zdt = 0$. Second exemple.

Mettant dans la propoſée pour d^3y, ddy, dy leurs valeurs tirées des équations précédentes, & ſuppoſant toujours dt conſtant, nous aurons $dt^2dx + bxdt^3 + czdt^3 + Kydt^3 + Tdt^3 = 0$ & $dx + bxdt + czdt + Kydt + Tdt = 0$, équation réduite au cas de l'Art. CLXXV. Voilà donc les trois équations ſur leſquelles nous devons opérer.

Selon ce qui eſt dit (Chap. XV.) je multiplie la ſeconde de ces équations par un coefficient indéterminé μ, & la troiſieme par un autre coefficient indéterminé ν. J'aurai donc $dx + (bx + cz + Ky + T)dt = 0$, $\nu dy - \nu zdt = 0$, $\mu dz - \mu xdt = 0$.

J'ajoute enſemble ces trois équations de la façon ſuivante (A) $dx + \nu dy + \mu dz + ((b - \mu)x + (c - \nu)z +$

$Ky + T)\,dt = 0$. Soit maintenant $bx - \mu x + cz - vz + Ky = Rx + Rvy + R\mu z$, j'aurai en comparant terme à terme . . . . . $b - \mu = R$

$$c - v = R\mu$$
$$K = Rv.$$

Donc $b - \mu = \frac{c-v}{\mu} = \frac{K}{v}$. Donc $(b-\mu)\mu = c - v$ & $(b-\mu)v = K$. Donc l'équation (A) devient $dx + v\,dy + \mu\,dz + (x + vy + \mu z).(b-\mu)\,dt + T\,dt = 0$. Soit $x + vy + \mu z = u$, on aura $du + (b-\mu)\,u\,dt + T\,dt = 0$, équation intégrable par la méthode du Chapitre VII. . . . . .

Nous avons maintenant $\mu\mu - b\mu = v - c$, ou $\mu = \frac{b}{2} \pm \sqrt{(v - c + \frac{bb}{4})}$ & $\frac{b}{2} + \sqrt{(v - c + \frac{bb}{4})} = \frac{K}{v}$; donc $v - c + \frac{bb}{4} = \frac{KK}{vv} - \frac{bK}{v} + \frac{bb}{4}$. Donc $v^3 - cvv + Kbv = KK$. Soient n, n', n'' les trois valeurs de v, on aura en supposant que m, m', m'' sont les trois valeurs correspondantes de μ, on aura, dis-je,

$$du + (b-m)\,u\,dt + T\,dt = 0$$
$$du + (b-m')\,u\,dt + T\,dt = 0$$
$$du + (b-m'')\,u\,dt + T\,dt = 0,$$

& encore . . . . . $x + ny + mz = u$

$$x + n'y + m'z = u'$$
$$x + n''y + m''z = u''.$$

Des trois premieres équations on tirera la valeur de u en t, & les trois secondes nous donneront celles de x, y, z. Donc enfin on aura la valeur de y en t.

CCXLVIII.

REMARQUE. Cette méthode peut s'abréger en certains cas, par exemple, si on a $d^4y + Aydx^4 + Xdx^4 = 0$, au lieu d'employer quatre équations du premier degré, on peut se contenter de deux du second $ddy = udt^2$

$$ddu = Aydt^2,$$

lesquelles se réduisent à une équation du second degré, & celle-ci à deux du premier.

CHAPITRE VII.

Exposition d'une méthode pour construire ces mêmes équations $\frac{a\,d^n y}{dx^n} + \frac{b\,d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{g\,d^{n-2} y}{dx^{n-2}}$, *&c.* $+ X = 0$, *en* y *supposant* $X = 0$.

CCXLIX.

DAns le Tome VII. des *Miscellanea Berolinensia*, M. Euler donne une méthode pour construire ces mêmes équations $\frac{a\,d^n y}{dx^n} + \frac{b\,d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots$ &c. $+ X = 0$, en y supposant toutesfois $X = 0$. Voici le procédé de cette méthode. Procédé de cette méthode.

Il fait . . . . . $y = Ac^{fx}$

$$dy = Ac^{fx} f dx$$

$$ddy = Ac^{fx} ff dx^2$$

$$d^n y = Ac^{fx} f^n dx^n,$$

Ces valeurs ſubſtituées dans l'équation $\frac{a d^n y}{dx^n} + \frac{b d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{g d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \frac{h d^{n-3} y}{dx^{n-3}}$ + &c. $+ y = 0$ nous donnent la transformée ſuivante $\frac{A a c^{fx} f^n dx^n}{dx^n} + \frac{A b c^{fx} f^{n-1} dx^{n-1}}{dx^{n-1}} + \frac{A g c^{fx} f^{n-2} dx^{n-2}}{dx^{n-1}} + \frac{A h c^{fx} f^{n-3} dx^{n-3}}{dx^{n-3}}$ + &c. . . . $+ A c^{fx} = 0$, & en effaçant ce qui ſe détruit, on a $af^n + bf^{n-1} + gf^{n-2} + hf^{n-3}$ + &c. . . . $+ 1 = 0$. Il ne s'agit donc que de réſoudre cette derniere équation; & cette ſolution nous donnera autant de valeurs particulieres de y, que l'équation aura de racines. On ajoutera enſemble toutes ces valeurs de y, & on aura l'intégrale complete de la propoſée. C'eſt ce que nous allons développer en ramenant à des cas particuliers l'équation générale.

CCL.

Examen des différents cas qui peuvent arriver.

Suppoſons $n = 2$, l'équation à intégrer ſera $\frac{a d d y}{dx^2} + \frac{b dy}{dx} + y = 0$; & en mettant pour y ſa valeur Ac^{fx}, & en réduiſant on a $Ac^{fx} . (1 + bf + aff) = 0$. Que les valeurs de cette équation ſoient f & f', j'aurai $y = Ac^{fx}$ & $y = Bc^{f'x}$. Or chacune de ces valeurs de y ſubſtituée dans l'équation la rend égale à zéro; je dis de plus que la ſomme de ces deux valeurs donne de même un réſultat égal à zéro. Car on aura $Ac^{fx} . (1 + bf + aff) = 0$ & $Bc^{f'x} . (1 + bf' + af'f') = 0$ dans leſquelles tout ſe détruira par des ſignes contraires. Donc la ſomme

de

de ces deux valeurs ſubſtituée dans l'équation ſera auſſi évanouir tous les termes. Donc il faudra ſuppoſer $y = Ac^{fx} + Bc^{fx}$, & cette ſuppoſition renferme tous les cas, A étant $= 0$, $B = 0$, & A & B ayant une valeur.

Si $n = 3$, on trouvera par la même méthode, qu'il faut ſuppoſer $y = Ac^{fx} + Bc^{fx} + Dc^{fx}$, A, B, D étant des coefficiens tout-à-fait arbitraires, & ainſi de ſuite.

CCLI.

Lorſque f a ſes valeurs égales, l'équation alors ſera repréſentée par $ffy - \frac{2fdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$. Soit $y = c^{fx}u$, on aura $dy = c^{fx}du + fuc^{fx}dx$, & en ſuppoſant dx conſtant, $ddy = c^{fx}ddu + 2fc^{fx}dxdu + ffuc^{fx}dx^2$. Donc en ſubſtituant ces valeurs on aura la transformée ſuivante $ffc^{fx}u - \frac{2fc^{fx}du}{dx} - \frac{2ffc^{fx}udx}{dx} + \frac{e^{fx}ddu}{dx^2} + \frac{fc^{fx}dxdu}{dx^2} + \frac{fc^{fx}dxdu}{dx^2} + \frac{ffc^{fx}udx^2}{dx^2} = 0$. Donc en effaçant ce qui ſe détruit, on a $ddu = 0$. Donc $du = \epsilon dx$, $u = \epsilon x + \alpha$. Donc lorſque $1 + bf + aff = 0$ eſt un quarré, il faut ſuppoſer $y = (\alpha + \epsilon x)c^{fx}$,

CCLII.

Lorſque dans une équation différentielle du troiſieme ordre, f aura ſes trois valeurs égales, on trouvera par la même méthode qu'on doit alors ſuppoſer $y = (\alpha + \epsilon x + \gamma xx)c^{fx}$. Car dans ce cas on aura l'équation ſuivante à intégrer $f^3y - \frac{3f^2dy}{dx} + \frac{3fddy}{dx^2} - \frac{d^3y}{dx^3} = 0$. Soit, comme ci-

deſſus, $y = uc^{fx}$, $d^3y = c^{fx}d^3u + 3fc^{fx}dxddu + 3ffc^{fx}dx^2du + f^3uc^{fx}dx^3$. Après avoir ſubſtitué pour y, dy, d^2y, d^3y leurs valeurs, on trouve $d^3u = 0$; donc $ddu = Adx^2$; $du = Axdx + Bdx$ & $u = \frac{Ax^2}{2} + Bx + C$. Donc enfin $y = uc^{fx} = (\alpha + \epsilon x + \gamma xx)c^{fx}$.

CCLIII.

Donc en général ſi f avoit un nombre k de racines égales, il faudroit ſuppoſer $y = (\alpha + \epsilon x + \gamma xx + \delta x^3 + \ldots + \lambda x^{k-1})c^{fx}$. Ce qui eſt évident par ce qui précede.

CCLIV.

Maintenant ſi f a des valeurs imaginaires, ces imaginaires, comme on le ſait, iront toujours en nombre pair. Ainſi ſuppoſons que dans l'équation $1 + bf + aff = 0$, on ait $\frac{b}{2\sqrt{a}} < 1$, alors on aura (Art. LXXXI. Introd.) $f = m + n\sqrt{-1}$ & $f' = m - n\sqrt{-1}$. Donc il faudra ſuppoſer $y = Ac^{mx+nx\sqrt{-1}} + Bc^{mx-nx\sqrt{-1}} = (Ac^{nx\sqrt{-1}} + Bc^{-nx\sqrt{-1}})c^{mx}$. Si l'on ſuppoſe A & B réelles & égales & $= P$, cette quantité deviendra réelle; & dans ce cas on aura (Art. XLVI. Introd.) $y = c^{mx} \times 2P.$ cof. nx. Elle ſera encore réelle ſi on ſuppoſe A & B imaginaires & de différents ſignes. Soit, par exemple, $A = Q\sqrt{-1}$, $B = -Q\sqrt{-1}$, on aura $y = c^{mx}.(Q\sqrt{-1}.c^{nx\sqrt{-1}} - Q\sqrt{-1}.c^{-nx\sqrt{-1}}) =$ (Art. XLV. Introd.) $c^{mx}.2\sqrt{-1}.Q\sqrt{-1}.$ ſin. $nx = c^{mx} \times -2Q.$ ſin. nx. Nous venons de trouver plus haut $y = c^{mx}.$

$2P$. cof. nx. Donc en général $y = c^{mx}$. fin. $(nx + R)$. Donc l'intégrale cherchée eſt $y = Hc^{mx}$. fin. $(nx + R)$. Car prenons un angle R dont le ſinus ſoit au co-ſinus, comme $2P$ eſt à $-2Q$, on aura fin. R : cof. R :: $2P$: $-2Q$. Donc fin. $R = \frac{2P}{H}$ & cof. $R = -\frac{2Q}{H}$. Donc $2P = H$. fin. R & $-2Q = H$. cof. R. Mettant ces valeurs dans $2P$. cof. $nx - 2Q$. fin. nx, on aura H. fin. R. cof. $nx + H$. cof. R. fin. $nx = H \times$ (fin. R cof. $nx +$ cof. R. fin. nx) = (Art. XLIX. N°. 2. Introduct.) H. fin. $(nx + R)$.

Appliquons maintenant cette méthode à quelques exemples.

CCLV.

Application de la méthode à une équation différentielle du ſecond ordre.

Soit propoſé d'intégrer l'équation ſuivante $Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{K\,ddy}{dx^2} = 0$, dans laquelle dx eſt conſtant. Je ſuppoſe $y = Ec^{fx}$; j'aurai la transformée ſuivante $AEc^{fx} + \frac{BEc^{fx}fdx}{dx} + \frac{KEc^{fx}ffdx^2}{dx^2} = 0$; & en réduiſant $A + Bf + Kff = 0$. Cette équation a deux racines, toutes deux réelles ou toutes deux imaginaires.

1°. Les racines ſont réelles, quand BB eſt $> 4AK$. Dans ce cas les deux racines ſont $f = \frac{-B \pm \sqrt{(BB - 4AK)}}{2K}$. Donc l'intégrale cherchée eſt (Art. CCXLIX.) $y = ac^{\frac{-Bx + x\sqrt{(BB-4AK)}}{2K}} + cc^{\frac{-Bx - x\sqrt{(BB-4AK)}}{2K}}$.

Il y a encore un cas particulier à diſtinguer ici, c'eſt celui dans lequel on auroit $BB = 4AK$. Car alors $A + 2f\sqrt{4AK} + Kff = 0$ ſeroit un quarré, celui de $\sqrt{A}$

$+fV K$. Donc les racines seroient égales. Donc (Art. CCLI.) on auroit $y=(\alpha+\epsilon x)\,c^{-xV\frac{A}{K}}$. Car la supposition de $BB=4AK$ donne $B=2V\overline{AK}$ & $f=-\frac{B}{2K}$. Donc $y=(\alpha+\epsilon x)\,c^{-xV\frac{A}{K}}$ sera l'intégrale de l'équation $Ay+\frac{2dyV AK}{dx}+\frac{K\,ddy}{dx^2}=0$.

2°. Soit maintenant $BB<4AK$, dans ce cas les racines seront imaginaires. On aura donc $m=-\frac{B}{2K}$, $\pm nV-1=\frac{V(BB-4AK)}{2K}$ & $n=\frac{V(4AK-BB)}{2K}$. Donc en comparant cette valeur avec la formule $y=Hc^{mx}$ sin. $(nx+R)$, on aura l'intégrale suivante $y=Hc^{-\frac{Bx}{2K}}$. sin. $(x\frac{V(4AK-BB)}{2K}+R)$.

CCLVI.

Son application à une équation du troisieme ordre.

Soit encore à intégrer l'équation suivante $y-\frac{3a^2\,ddy}{dx^2}+\frac{2a^3d^3y}{dx^3}=0$; je supposerai $y=Ac^{fx}$, ce qui me donne la transformée suivante $1-3aaff+2a^3f^3=0$. Les facteurs de cette équation sont $(1+2af)$ & $(1-af)^2$. Le premier nous donne $f=-\frac{1}{2a}$, d'où l'on tire $y=Ac^{\frac{-x}{2a}}$. Le second a ses deux valeurs égales, on aura $f=\frac{1}{a}$, & par conséquent $y=(\alpha+\epsilon x)\,c^{\frac{x}{a}}$. Donc l'intégrale complete sera $y=Ac^{\frac{-x}{2a}}+(\alpha+\epsilon x)\,c^{\frac{x}{a}}$.

CCLVII.

A une équation d'un ordre n quelconque.

Enfin soit proposé d'intégrer l'équation suivante $\frac{d^n y}{dx^n}$

$= 0$; la ſuppoſition de $y = Ac^{fx}$ donne ici $f^n = 0$. Donc f a toutes ſes racines égales. Donc ſuivant ce que nous avons dit plus haut, il faudra faire $y = (a + bx + cxx + \ldots$ &c.$)\, c^{fx}$. Mais $f = 0$ donne $c^{fx} = c^0 = 1$. Donc la ſuppoſition ſe réduit à $y = a + bx + cx^2 + ex^3 + \ldots + px^{n-1}$.

Et en effet c'eſt ce qu'on trouvera de même, en prenant ſucceſſivement autant d'intégrales que n contient d'unités. Soit $n = 4$, la propoſée ſera $\frac{d^4 y}{dx^4} = 0$, dx étant conſtant, on aura pour intégrale $\frac{d^3 y}{dx^3}$, que l'on ſuppoſera égale à une conſtante de cette forme $\frac{a}{dx}$; ce qui fournit l'équation ſuivante $d^3 y = a dx^3$; & enſuite $ddy = axdx^2 + bdx^2$; $dy = \frac{ax^2 dx}{2} + bxdx + cdx$. Donc enfin $y = \frac{ax^3}{2 \cdot 3} + \frac{bx^2}{2} + cx + f$.

CHAPITRE VIII.

Comparaiſon de la Méthode expoſée dans le Chapitre précédent avec celle que nous avons donnée dans le Chapitre VI.

CCLVIII.

Démonſtration de la Méthode précédente.

TElle eſt la méthode donnée par M. Euler pour la ſolution des équations renfermées dans la formule $\frac{ad^n y}{dx^n} + \frac{bd^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{gd^{n-2} y}{dx^{n-2}} +$ &c. $= 0$. Cette méthode

peut paroître plus ſimple que celle qui réſulte de la ſolution générale expoſée dans le Chapitre VI. Mais la Méthode de M. d'Alembert rapprochée de celle de M. Euler en démontre la généralité. En effet on ne voit pas clairement que l'intégration ne réuſſira qu'en faiſant $y = Ac^{fx}$; au lieu que la ſolution énoncée ci-deſſus qui donne la valeur de y, nous montre avec évidence que y doit en effet être exprimée par un certain nombre de termes $Ac^{fy} + Bc^{gx} + Dc^{hx} + \&c.$

Car dans les cas, par exemple, où l'équation eſt du troiſieme degré, telle que $d^3y + bddy\,dx + cdy\,dx^2 + Ky\,dx^3 = 0$, en faiſant, $ddy = p\,dx^2$

$$dy = z\,dx,$$

& pratiquant les opérations expoſées (Art. CCXLV.) on aura les trois équations ſuivantes,

$$dp + bp\,dx + cz\,dx + Ky\,dx = 0$$
$$dz - p\,dx = 0$$
$$dy - z\,dx = 0;$$

& enſuite $dp + (bp + cz + Ky)\,dx = 0$

$$v\,dy - vz\,dx = 0$$
$$\mu\,dz - \mu p\,dx = 0.$$

Donc $dp + v\,dy + \mu\,dz + \{(b-\mu)p + (c-v)z + Ky\}\,dx = 0$. Donc en ſuppoſant $(b-\mu)p + (c-v)z + Ky = Rp + Rvy + R\mu z$, & $p + vy + \mu z = u$, on aura $\frac{du}{u} = (\mu - b)\,dx$. Donc en faiſant pour les valeurs de v & de μ les mêmes calculs que dans l'article CLXXV. on trouvera . . . . . $p + ny + mz = u$

$$p + n'y + m'z = u'$$
$$p + n''y + m''z = u'',$$

& de plus . . . . . $du + \rho u dx = 0$
$$du' + \rho' u' dx = 0$$
$$du'' + \rho'' u'' dx = 0.$$

Par le moyen des trois premieres équations, on aura d'abord $p = \frac{m''u' - m'u'' + n''m'y - n'm''y}{m'' - m'}$, $z = \frac{u'' - u' - n''y + n'y}{m'' - m'}$, & par conſéquent on aura $y = \frac{(m'' - m')u - m''u' + m'u''}{nm'' - nm' - n'm - n''m + n''m' - n'm''}$. Donc $y = Pu + P'u' + P''u''$. Mais des trois ſecondes équations on tire . . . . $lu = -\rho x + b$
$$lu' = -\rho' x + b'$$
$$lu'' = -\rho'' x + b'',$$

& par conſéquent . . . . $u = c^{-\rho x + b}$
$$u' = c^{-\rho' x + b'}$$
$$u'' = c^{-\rho'' x + b''},$$

ou bien encore . . . . . $u = c^{-\rho x} \times c^{b}$
$$u' = c^{-\rho' x} \times c^{b'}$$
$$u'' = c^{-\rho'' x} \times c^{b''}.$$

Donc enfin . . . . $y = Ac^{fx} + Bc^{gx} + Dc^{hx}$.

CCLIX.

En ſuivant la méthode de M. d'Alembert, ſi on trouve les valeurs de f égales, alors on augmentera ces valeurs de quantités infiniment petites différentes l'une de l'autre. Ainſi on fera $y = Ac^{fx + \alpha x} + Bc^{fx + \rho x}$, α & ρ étant des quantités infiniment petites. Donc on aura $y = Ac^{fx} + A\alpha x c^{fx} + Bc^{fx} + B\rho x c^{fx}$; d'où l'on tire $y =$

Examen des cas différens d'après la méthode du Chapitre VI.

$(A+B)c^{fx}+(A\alpha+B\beta)xc^{fx}$. Donc enfin $y=(l+mx)c^{fx}$; ſuppoſition que nous fait faire de même la méthode de M. Euler. Nous aurions pu pouſſer l'expreſſion de $c^{fx+\alpha x}$ & de $c^{fx+\beta x}$ au-delà de deux termes; mais nous nous ſommes contentés de deux, parce qu'il n'y a dans l'équation $y=Ac^{fx+\alpha x}+Bc^{fx+\beta x}$ que deux coefficiens A & B & deux quantités infiniment petites α & β abſolument arbitraires.

CCLX.

Si f a trois valeurs égales, alors on ſuppoſera $y=Ac^{fx+\alpha x}+Bc^{fx+\beta x}+Dc^{fx+\sigma x}$. Comme il y a dans ce cas trois coefficiens & trois quantités infiniment petites indéterminées, on pouſſera juſqu'à trois termes la valeur approchée de $c^{fx+\alpha x}$ & des autres. On aura donc $y=Ac^{fx}+A\alpha xc^{fx}+\frac{A\alpha\alpha xxc^{fx}}{2}+Bc^{fx}+B\beta xc^{fx}+\frac{B\beta\beta xxc^{fx}}{2}+Dc^{fx}+D\sigma xc^{fx}+\frac{D\sigma\sigma xxc^{fx}}{2}$. Donc $y=(A+B+D)c^{fx}+(A\alpha+B\beta+D\sigma)xc^{fx}+\left\{\frac{A\alpha\alpha+B\beta\beta+D\sigma\sigma}{2}\right\}x^2c^{fx}$. Donc enfin $y=(l+mx+nxx)c^{fx}$.

CCLXI.

Quand une des valeurs de f eſt $=0$, c'eſt alors une marque qu'il y a dans l'expoſition de y un terme tout conſtant. Soit, par exemple, à intégrer l'équation $d^3y+ad^2ydx+bdydx^2=0$, ſi je fais $y=Ac^{fx}$, après la ſubſtitution

ſubſtitution j'aurai la transformée ſuivante $Ac^{fx}f^3dx^3 + Aac^{fx}f^2dx^3 + Abc^{fx}fdx^3 = 0$; donc $f^3 + aff + bf = 0$; donc nous aurons $f = 0$ & $ff + af + b = 0$. Cette ſeconde équation nous donne $y = Bc^{gx} + Dc^{hx}$. La premiere donne $y = Ec^0 = E1 = E$. Donc la valeur complete de y eſt $y = Bc^{gx} + Dc^{hx} + E$.

Et en effet, ſoit . . . . . $dy = zdx$

$z = Ac^{fx}$,

on aura . . . . . $ddy = dzdx$

$d^3y = ddzdx$,

& par conſéquent la transformée ſuivante $ddzdx + adzdx^2 + bzdx^3 = 0$, qui donne $ff + af + b = 0$. Donc (Art. CCL.) $z = Ac^{gx} + Fc^{hx}$. Or $dy = zdx$, donne $y = \int zdx + E = \int(Ac^{gx}dx + Fc^{hx}dx) + E$. Donc $y = Bc^{gx} + Dc^{hx} + E$.

CCLXII.

Si f a pluſieurs valeurs égales à zéro, alors on remarquera que ces valeurs ſont de plus égales entre elles. Donc ſuivant ce que nous avons dit (Art. CLIX.) on augmentera ces valeurs de quantités infiniment petites c^{ax}, c^{bx}, c^{Bx} différentes l'une de l'autre, & on pouſſera l'expreſſion de ces quantités juſqu'à un nombre de termes égal à celui des racines $= 0$.

CCLXIII.

Soit propoſé d'intégrer l'équation $d^5y + ad^4ydx +$

Application à un exemple du cinquieme ordre.

$b d^3 y dx^2 = 0$, dans laquelle dx eſt toujours conſtant. La transformée, en ſuppoſant $y = Ac^{fx}$, ſera $Ac^{fx} f^5 dx^5 + Aac^{fx} f^4 dx^5 + Abc^{fx} f^3 dx^5 = 0$; & en réduiſant on a $f^3 + af^4 + bf^3 = 0$. Or de cette équation on tire 1°. $f^3 = 0$, qui nous apprend que f a trois valeurs égales & $= 0$; 2°. $ff + af + b = 0$. Donc en pratiquant ce qui eſt dit plus haut, on aura pour l'équation $ff + af + b = 0$, $y = Ac^{-\frac{ax}{2} + x\sqrt{(\frac{aa}{4} - b)}} + Bc^{-\frac{ax}{2} - x\sqrt{(\frac{aa}{4} - b)}}$; ou bien $y = Ac^{mx} + Bc^{nx}$. Pour l'équation $f^3 = 0$, on aura $y = Dc^{fx+\alpha x} + Ec^{fx+\epsilon x} + Fc^{fx+\varphi x} = Dc^{fx} + D\alpha x c^{fx} + \frac{D\alpha\alpha x x c^{fx}}{2} + Ec^{fx} + E\epsilon x c^{fx} + \frac{E\epsilon\epsilon x x c^{fx}}{2} + Fc^{fx} + F\varphi x c^{fx} + \frac{F\varphi\varphi x x c^{fx}}{2} = (D + E + F) c^{fx} + (D\alpha + E\epsilon + F\varphi) x c^{fx} + (D\alpha\alpha + E\epsilon\epsilon + F\varphi\varphi) \frac{x x c^{fx}}{2}$. Mais $f = 0$, donne $c^{fx} = c^0 = 1$, donc on a $y = D + E + F + (D\alpha + E\epsilon + F\varphi) x + (D\alpha\alpha + E\epsilon\epsilon + F\varphi\varphi) \frac{xx}{2} = l + px + qxx$. Donc la valeur complete de y ſera $Ac^{mx} + Bc^{nx} + l + px + qxx$.

CCLXIV.

C'eſt ce dont on peut ſe convaincre de la façon ſuivante. Je reprends l'équation propoſée $d^5 y + a d^4 y dx + b d^3 y dx^2 = 0$. Faiſons $y \ldots dy = z dx$

$dz = q dx$

$dq = r dx$

$r = A' c^{fx}$.

Nous aurons . . . . . $ddy = dzdx = qdx^2$

$d^3y = dqdx^2 = rdx^3$

$d^4y = ddrdx^3$

$d^5y = dddrdx^3$.

Donc la transformée ſera $d^2rdx^3 + adrdx^4 + brdx^3 = 0$, ou $ddr + addrdx + brdx^2 = 0$; équation de laquelle on tire (Art. CCLVIII.) $r = A'c^{mx} + B'c^{nx}$. Mais $dq = rdx$ donne $q = \int rdx + E = \int (A'c^{mx}dx + B'c^{nx}dx) + E = \frac{A'c^{mx}}{m} + \frac{B'c^{nx}}{n} + E$. Donc $q = A''c^{mx} + B''c^{nx} + E$. De même $dz = qdx$ donne $z = \int qdx + C = \int (A''c^{mx}dx + B'c^{nx}dx + Edx) + C$. Donc $z = A'''c^{mx} + B'''c^{nx} + Ex + C$. Enfin $dy = zdx$ donne $y = \int zdx + L = \int (A'''c^{mx}dx + B'''c^{nx}dx + Exdx + Cdx) + L$. Donc $y = Ac^{mx} + Bc^{nx} + I + px + qxx$.

CCLXV.

Application de la méthode du Chap. VII. Sect. II. à une formule plus générale que celle qu'on y a traitée.

SCHOLIE I. Si l'on vouloit maintenant appliquer la méthode de M. Euler à l'équation $d^ny + ad^{n-1}ydx + \ldots + Xdx^n = 0$, dans laquelle ſe trouve, comme on le voit, le terme Xdx^n, alors on remarquera que dans le cas où l'équation différentielle eſt, par exemple, du troiſieme ordre, le Problême ſe réduit aux équations ſuivantes . . . . . $du + \rho udx + Xdx = 0$

$du' + \rho'u'dx + Xdx = 0$

$du'' + \rho''u''dx + Xdx = 0$,

& . . . . . $x + ny + mz = u$

$$x + n'y + m'z = u'$$
$$x + n''y + m''z = u''.$$

Multipliant par $c^{\int p x}$ l'équation $du + pu\,dx + X\,dx = 0$, elle devient $du\,c^{\int p x} + pu\,dx\,c^{\int p x} + X\,dx\,c^{\int p x} = 0$; dont l'intégrale eſt $u\,c^{\int p x} + \int X c^{\int p x}\,dx + P = 0$. Donc $u + c^{-\int p x} \int X c^{\int p x}\,dx + P c^{-\int p x} = 0$. On aura de la même maniere $u' + c^{-\int p' x} \int X c^{\int p' x}\,dx + P' c^{-\int p' x} = 0$, $u'' + c^{-\int p'' x} \int X c^{\int p'' x}\,dx + P'' c^{-\int p'' x} = 0$. Subſtituant ces valeurs de u, u', u'' dans les trois ſecondes équations, on en tirera la valeur de y en x, laquelle ſera de la forme ſuivante $y = A c^{\int f x} + B c^{\int g x} + D c^{\int h x} + \&c. + E c^{\int f x} \int c^{-\int f x} X\,dx + F c^{\int g x} \int X c^{-\int g x}\,dx + G c^{\int h x} \int X c^{-\int h x}\,dx + \&c.$

CCLXVI.

Application de la formule à une équation différentielle du ſecond ordre.

Ainſi ſuppoſons qu'on ait à intégrer l'équation différentielle du ſecond ordre $ddy + a\,dy\,dx + b\,y\,dx^2 + X\,dx^2 = 0$, on ſera $y = A c^{\int f x} + B c^{\int g x} + E c^{\int f x} \int X c^{-\int f x}\,dx + F c^{\int g x} \int X c^{-\int g x}\,dx$. Maintenant pour déterminer f, g, A, B, E, F, je ſubſtitue dans l'équation à la place de y, dy, ddy, leurs valeurs : cette opération me donne la tranſformée ſuivante,

$$\begin{aligned}
&+ A c^{\int f x} f^2\,dx^2 + B c^{\int g x} g^2\,dx^2 + E\,dX\,dx + E f X\,dx^2 + \\
&+ A a c^{\int f x} f\,dx^2 + a B c^{\int g x} g\,dx^2 + F\,dX\,dx + F g X\,dx^2 \\
&+ A b c^{\int f x}\,dx^2 + b B c^{\int g x}\,dx^2 + a E X\,dx^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + a F X\,dx^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + X\,dx^2 \\
&+ E f^2\,dx^2\, c^{\int f x} \int c^{-\int f x} X\,dx + F g^2\,dx^2\, c^{\int g x} \int c^{-\int g x} X\,dx \\
&+ a E f\,dx^2\, c^{\int f x} \int c^{-\int f x} X\,dx + a F g\,dx^2\, c^{\int g x} \int c^{-\int g x} X\,dx \\
&+ b E\,dx^2\, c^{\int f x} \int c^{-\int f x} X\,dx + b F\,dx^2\, c^{\int g x} \int c^{-\int g x} X\,dx = 0.
\end{aligned}$$

Or de cette équation on tire les ſix équations ſuivantes, en égalant à zéro les coefficiens de tous les termes analogues,

$$\begin{aligned} Aff + Aaf + Ab &= 0 \\ Bgg + Bag + Bb &= 0 \\ Eff + Eaf + Eb &= 0 \\ Fgg + Fag + Fb &= 0 \\ Ef + Fg + Ea + Fa + 1 &= 0 \\ E + F &= 0 \end{aligned}$$

Donc on aura les valeurs de A, B, E, F, f, g. Donc on aura la valeur complete de y. Au reſte on remarquera que A & B pourront être tout ce qu'on voudra.

S'il y a des racines égales, par exemple, ſi $f = g$, alors au lieu des termes $Ec^{fx}\int c^{-fx}Xdx + Fc^{gx}\int c^{-gx}Xdx$, on aura $pc^{fx}\int c^{-fx}Xdx + qxc^{fx}\int c^{-fx}Xdx - qc^{fx}\int xc^{-fx}Xdx$.

Car dans ce cas il faut faire (Art. CCLIX.) $y = Ac^{fx+\alpha x} + Bc^{fx+\varphi x}$ + &c. + $Ec^{fx+\alpha x}\int c^{-fx-\alpha x}Xdx + Fc^{fx+\varphi x}\int c^{-fx-\varphi x}Xdx$ + &c. α & φ étant des quantités infiniment petites différentes l'une de l'autre. Or $c^{fx+\alpha x} = c^{fx} + \alpha x c^{fx}$, $c^{fx+\varphi x} = c^{fx} + \varphi x c^{fx}$: donc en ſuppoſant $A + B = l$, $A\alpha + B\varphi = m$, on aura $y = (l + mx)c^{fx} + Ec^{fx}\int c^{-fx}Xdx - Ec^{fx}\int \alpha x c^{-fx}Xdx + E\alpha x c^{fx}\int c^{-fx}Xdx - E\alpha x c^{fx}\int \alpha x c^{-fx}Xdx + Fc^{fx}\int c^{-fx}Xdx - Fc^{fx}\int \varphi x c^{-fx}Xdx + F\varphi x c^{fx}\int c^{-fx}Xdx - F\varphi x c^{fx}\int \varphi x c^{-fx}Xdx =$ (en ſuppoſant $E + F = p$, & $E\alpha + F\varphi = q$) $(l + mx)c^{fx} + (p + qx)c^{fx}\int c^{-fx}Xdx - (E + E\alpha x).c^{fx}\int \alpha x c^{-fx}Xdx - (F +$

$F\varphi x)\, c^{fx} \int \varphi x c^{-fx} X dx = (l + mx)\, c^{fx} + (p + qx)\, c^{fx} \int c^{-fx} X dx - (E\alpha + E\alpha\alpha x)\, c^{fx} \int x c^{-fx} X dx - (F\varphi + F\varphi\varphi x).\, c^{fx} \int x c^{-fx} X dx$. Mais comme α & φ. ſont des quantités infiniment petites, les termes où ſe trouvent leurs quarrés ſont nuls par rapport aux autres : donc on aura $y = (l + mx)\, c^{fx} + p c^{fx} \int c^{-fx} X dx + q x c^{fx} \int c^{-fx} X dx - q c^{fx} \int x c^{-fx} X dx$.

Si pluſieurs racines étoient égales à zéro, par exemple, ſi on avoit $f = 0$, $g = 0$, alors cette ſuppoſition nous donneroit $c^{fx} = 1$; donc on auroit $y = l + mx +$ &c. $+ p \int X dx + q x \int X dx - q \int x X dx +$ &c.

Il eſt aiſé de voir maintenant le procédé qu'il faudroit ſuivre, s'il y avoit dans l'équation propoſée plus de deux racines égales, ou égales à zéro.

CCLXVII.

Autres équations traitées par la méthode du Chap. VII. Sect. II.

SCHOLIE 2. En ſuivant les mêmes principes, on appliquera facilement la méthode de M. Euler aux équations différentielles du premier degré que nous avons réſolues dans le Chapitre XV. par la méthode des coefficiens indéterminés : nous trouverons la forme que doivent avoir les valeurs indéterminées x, y, z &c. Nous allons le faire voir par un exemple.

CCLXVIII.

Soient propoſées les deux équations

$$dx + a dy + (cx + ey)\, T dt + \theta dt = 0$$

$$dy + b\,dx + (fx + gy)\,T\,dt + F\,dt = 0,$$

dans lesquelles θ, T & F sont des fonctions quelconques de t. Je multiplie la seconde de ces deux équations par un coefficient indéterminé μ, & j'aurai

$$dx + a\,dy + (cx + ey)\,T\,dt + \theta\,dt = 0$$
$$\mu\,dy + b\mu\,dy + (fx + gy)\,\mu T\,dt + \mu F\,dt = 0:$$

je les ajoute ensemble, j'ai $(1 + b\mu)\,dx + (a + \mu)\,dy + \{(c + \mu f)\,x + (e + g\mu)\,y\}\,T\,dt + (\theta + \mu F)\,dt = 0$. Soit $(c + f\mu)\,x + (e + g\mu)\,y = (1 + b\mu)\,Rx + (a + \mu)\,Ry$, on aura en comparant terme à terme

$$c + f\mu = R + b\mu R$$
$$e + g\mu = aR + \mu R,$$

donc l'équation devient $(1 + b\mu)\,dx + (a + \mu)\,dy + \{(1 + b\mu)\,Rx + (a + \mu)\,Ry\}\,T\,dt + (\theta + \mu F)\,dt = 0$.

Soit . . . . $(1 + b\mu)\,x + (a + \mu)\,y = u$,

on aura . . . $(1 + b\mu)\,Rx + (a + \mu)\,Ry = Ru$

$$(1 + b\mu)\,dx + (a + \mu)\,dy = du:$$

donc en substituant ces valeurs dans la derniere équation, j'aurai $du + Ru\,T\,dt + (\theta + \mu F)\,dt = 0$, équation intégrable par la méthode de M. Bernoulli, exposée dans le Chapitre VII. Section I. . . . . .

Rappellons-nous le procédé que cette méthode nous donne pour trouver la valeur de u en t, nous multiplierons l'équation par t', en supposant que t' soit une fonction de t, telle que les deux premiers termes deviennent une différentielle exacte. On aura donc $t'\,du + Ru\,t'\,T\,dt + (\theta + \mu F)\,t'\,dt = 0$. Mais par l'hypothese

précédente on a $dt' = Rt'Tdt$; donc $\frac{dt'}{t'} = RTdt$; donc $lt' = \int RTdt$; donc $t' = c^{R\int Tdt}$. Donc $c^{R\int Tdt}du + uc^{R\int Tdt}RTdt + (\theta + \mu F)c^{R\int Tdt}dt = 0$, équation dont l'intégrale eſt $uc^{R\int Tdt} + \int(\theta + \mu F)c^{R\int Tdt}dt = Q$. Donc enfin $u = Qc^{-R\int Tdt} - c^{-R\int Tdt}\int(\theta + \mu F)c^{R\int Tdt}dt$.

Maintenant on a . . . . $\frac{c + f\mu}{1 + b\mu} = R$,

& . . . . . $\frac{e + g\mu}{a + \mu} = R$:

donc . . . . . $\frac{e + g\mu}{a + \mu} = \frac{c + f\mu}{1 + b\mu}$: donc $e + g\mu + be\mu + bg\mu\mu = ac + af\mu + c\mu + f\mu\mu$, équation qui nous apprend que μ a deux valeurs. Soient m & m' ces deux valeurs de μ, au lieu de l'équation $u = Qc^{-R\int Tdt} - c^{-R\int Tdt}\int(\theta + \mu F)c^{R\int Tdt}dt$, on aura les deux ſuivantes,

$$u = Qc^{-R\int Tdt} - c^{-R\int Tdt}\int(\theta + mF)c^{R\int Tdt}dt,$$
$$u' = Q'c^{-R'\int Tdt} - c^{-R'\int Tdt}\int(\theta + m'F)c^{R'\int Tdt}dt;$$

& au lieu de l'équation $(1 + b\mu)x + (a + \mu)y = u$, en ſuppoſant . . . . $1 + bm = i$, $a + m = n$

$1 + bm' = l$, $a + m' = h$,

on aura . . . . . $ix + ny = u$

$lx + hy = u'$.

De ces deux équations on tire après un calcul fort ſimple . . . . . $y = \frac{iu' - lu}{ih - ln}$,

$x = \frac{hu - nu'}{ih - ln}$.

Donc en ſubſtituant pour u, & u' leurs valeurs, on aura $x = Ac^{-R\int Tdt} + Bc^{-R'\int Tdt} + Ec^{-R\int Tdt}\int(\theta + mF)c^{R\int Tdt}$

$c^{R\int T dt} dt + Fc^{-R'\int T dt} \int (\theta + m'F) c^{R'\int T dt} dt$. Donc en ſuppoſant . . . . . $-R = f$

$-R' = g$

on a $x = Ac^{f\int T dt} + Bc^{g\int T dt} + Ec^{f\int T dt} \int (\theta + mF) c^{-f\int T dt} dt + Fc^{g\int T dt} \int (\theta + m'F) c^{-g\int T dt} dt$. On trouvera de même $y = A'c^{f\int T dt} + B'c^{g\int T dt} + E'c^{f\int T dt} \int (\theta + mF) e^{-f\int T dt} dt + Fc^{g\int T dt} \int (\theta + m'F) c^{-g\int T dt} dt$.

CCLXVIII.

Si l'on avoit à intégrer les trois équations ſuivantes,

$$dx + (ax + by + cz)\, dt = 0$$
$$dy + (ex + fy + gz)\, dt = 0$$
$$dz + (hx + my + nz)\, dt = 0$$

on trouveroit en ſuivant les mêmes procédés

$$x = Ac^{ft} + Bc^{gt} + Dc^{ht}$$
$$y = A'c^{ft} + B'c^{gt} + D'c^{ht}$$
$$z = A''c^{ft} + B''c^{gt} + D''c^{ht};$$

CCLXIX.

COROLLAIRE GENERAL. Il ſuit de tout ce que nous venons de dire dans ce Chapitre, que la forme qu'il faut donner aux indéterminées x, y, z, &c. dépend de deux choſes, 1°. De la forme de la valeur des u dans l'équation finale. 2°. Du nombre d'équations du premier degré auxquelles le Problême ſe réduira; ou ce qui revient au même, des valeurs de u, u', u'', &c, qui toutes ſont, comme on l'a vu, repréſentées par des équations ſemblables & de différents coefficients.

CHAPITRE IX.

Méthode pour trouver les cas d'intégrabilité de quelques équations du ſecond ordre, repréſentées par la formule (M) $(a+bx^n)x^2\,ddv+(c+fx^n)\,xdxdv+(g+hx^n)\,vdx^2=0$, *dans laquelle* dx *eſt conſtant.*

CCLXX.

DAns les Chapitres IX, X & XI de la premiere Section, nous avons développé comment on trouvoit les cas d'intégrabilité de l'équation de Ricati & de quelques autres du premier ordre à trois ou quatre termes, qu'on ne peut intégrer généralement par les méthodes connues des Géometres juſqu'à préſent. C'eſt un travail avantageux aux progrès de l'analyſe, que de chercher ainſi des intégrales particulieres, lorſque l'art ne nous en donne point de générales. M. Euler l'a pratiqué pour les équations du ſecond ordre repréſentées par la formule $(M)\ (a+bx^n)\,x^2\,ddv+(c+fx^n)\,xdxdv+(g+hx^n)\,vdx^2=0$, dans laquelle dx eſt ſuppoſé conſtant.

Quel eſt l'auteur de cette méthode.

Mais avant d'expoſer la méthode dont il ſe ſert, nous allons placer ici la ſolution d'un Problême dont nous aurons lieu de faire l'application dans ce Chapitre.

Solution d'un Problême néceſſaire pour la ſuite.

CCLXXI.

Probleme. Etant donnée l'intégrale particuliere d'une différentielle d'un ordre plus élevé que le premier, trouver par ſon moyen l'intégrale générale & complete de cette équation.

Solution. Soit l'équation $Pddv + Qdxdv + Rvdx^2 = 0$, dans laquelle P, Q & R ſont des fonctions de x, qu'on a intégrée pour un cas particulier en faiſant $v = X$, c'eſt-à-dire, une fonction de x. Pour trouver l'intégrale complete, je fais $v = Xz$,

ce qui me donne . . $dv = Xdz + zdX$

$$ddv = zddX + 2dXdz + Xddz.$$

Je ſubſtitue ces valeurs dans la propoſée ; cette ſubſtitution donne la transformée ſuivante,

$$PzddX + 2PdXdz + PXddz = 0$$
$$+ QzdXdx + QXdxdz$$
$$+ RzXdx^2$$

mais X eſt la valeur qu'il faut ſubſtituer à v dans l'équation $Pddv + Qdxdv + Rvdx^2 = 0$; on aura donc $PzddX + QzdXdx + RzXdx^2 = 0$; donc en effaçant ces termes dans la transformée, il nous reſte $2PdXdz + QXdxdz + PXddz = 0$, ou bien $\frac{2dX}{X} + \frac{Qdx}{P} + \frac{ddz}{dz} = 0$. Or P & Q étant des fonctions de x, l'intégrale de cette équation eſt $2lX + \int\frac{Qdx}{P} + l\frac{dz}{dx} = A$; & en ſuppoſant $\int\frac{Qdx}{P} = s$, c le nombre dont le logarithme eſt l'unité, on aura $2lX + slc + l\frac{dz}{dx} = A$; ou bien $X^2 c^s dz$

$= A dx$, ou $X^2 dz = A c^{-\int} dx$. Donc $z = A\int \frac{c^{-\int} dx}{X^2}$; donc Xz ou $v = AX\int \frac{c^{-\int \frac{Q dx}{P}} dx}{X^2}$; équation qui eſt l'intégrale complette de $P ddv + Q dx dv + R v dx^2 = 0$, en ſuppoſant que $v = X$ nous en donne une intégrale particuliere. Je paſſe maintenant à la méthode de M. Euler.

CCLXXII.

En quoi conſiſte la méthode.

Cette méthode conſiſte à transformer l'équation (M) en une ſerie telle que dans pluſieurs cas elle ſoit finie, & que nous ayons par conſéquent pour ces cas l'intégrale de la propoſée. Nous ramenerons enſuite cette équation du ſecond degré à une du premier, à laquelle nous donnerons différentes formes pour en déduire un grand nombre d'équations différentielles du premier ordre qui ſeront intégrables dans les mêmes cas que la formule (M).

On y peut faire uſage de deux ſeries différentes.

La formule (M) $(a + bx^n).x^2 ddv + (c + fx^n).x dx dv + (g + hx^n).v dx^2 = 0$ peut ſe transformer en ſerie de deux façons différentes.

1°. En ſuppoſant $v = Ax^m + Bx^{m+n} Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + Ex^{m+4n} +$ &c.

2°. En ſuppoſant $v = Ax^k + Bx^{k-n} + Cx^{k-2n} + Dx^{k-3n} + Ex^{k-4n} +$ &c. Examinons ſéparément les deux ſeries que nous donnent ces deux transformées, & les conditions ſuivant leſquelles ces ſeries ſeront terminées.

CCLXXIII.

1°. En faiſant dans $(a+bx^n)x^2\,ddv+(c+fx^n)xdxdv+(g+hx^n)vdx^2=0$, $v=Ax^m+Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}+Dx^{m+3n}+Ex^{m+4n}+$ &c. on aura $dv=mAx^{m-1}dx+(m+n)Bx^{m+n-1}dx+(m+2n)Cx^{m+2n-1}dx+(m+3n).Dx^{m+3n-1}dx+(m+4n).Ex^{m+4n-1}dx+$ &c.; & comme dx eſt conſtant, on aura $ddv=m.(m-1)Ax^{m-2}dx^2+(m+n).(m+n-1)Bx^{m+n-2}dx^2+(m+2n).(m+2n-1).Cx^{m+2n-2}dx^2+(m+3n).(m+3n-1).Dx^{m+3n-2}dx^2+(m+4n).(m+4n-1).Ex^{m+4n-2}dx^2+$ &c. Subſtituant dans l'équation $(a+bx^n)x^2\,ddv+(c+fx^n).xdxdv+(g+hx^n)xdx^2=0$, pour v, dv, ddv, ces valeurs, on aura la transformée ſuivante (N) $\{cm+g+am.(m-1)\}Ax^m dx^2+\{(cm+cn+g+(m+n).(m+n-1)a)B+(fm+h+bm.(m-1))A\}x^{m+n}dx^2+\{(fm+fn+h+(m+n).(m+n-1)b)B+(cm+2cn+g+(m+2n).(m+2n-1)a)C\}x^{m+2n}dx^2+\{(fm+2fn+h+(m+2n).(m+2n-1)b)C+(cm+3cn+g+(m+3n).(m+3n-1)a)D\}x^{m+3n}dx^2+\{(fm+3fn+h+(m+3n).(m+3n-1)b)D+(cm+4cn+g+(m+4n).(m+4n-1)a)E\}x^{m+4n}dx^2+\{(fm+4fn+h+(m+4n).(m+4n-1)b)E\}x^{m+5n}dx^2+$ &c. $=0$.

Premiere Serie.

J'égale maintenant à zéro les termes homogenes, j'aurai

la valeur déterminée des coefficiens A, B, C, D, E, & de l'expoſant m. D'abord on a $g+cm+am\cdot(m-1)=0$; & afin de ne pas tomber dans des quantités affectées de ſignes radicaux, je regarde m comme un nombre connu, & je m'en ſers pour déterminer g. J'aurai donc $g=-cm-am.(m-1)$.

Le ſecond terme nous donne $\{cm+cn+g+(m+n).(m+n-1)a\}B+(fm+h+bm.(m-1))A=0$. Je ſubſtitue dans cette équation au lieu de g ſa valeur, j'aurai $\{cm+cn-cm-am.(m-1)+(m+n).(m+n-1)a\}B+\{fm+h+bm.(m-1)\}A=0$, & en effaçant ce qui ſe détruit, on a

$$B=\frac{-A.[h+fm+bm.(m-1)]}{cn+an.(2m+n-1)}.$$

Faiſant les mêmes opérations ſur les termes ſuivans, on trouve

$$C=\frac{-B.[h+f(m+n)+b(m+n).(m+n-1)]}{2cn+2an.(2m+2n-1)}$$

$$D=\frac{-C.[h+f(m+2n)+b(m+2n).(m+2n-1)]}{3cn+3an.(2m+3n-1)}$$

$$E=\frac{-D.[h+f(m+3n)+b(m+3n).(m+3n-1)]}{4cn+4an.(2m+4n-1)}$$

&c.

On voit par là que A ſera une quantité conſtante arbitraire, dont la détermination donnera celle de tous les coefficients ſuivants. Il eſt encore évident que les valeurs de ces coefficients étant une fois déterminées, ſi un ſeul d'entre eux eſt égal à zéro, tous les ſuivants s'évanouiront, en ſorte que dans ces cas la valeur de v ſera finie, & par conſéquent l'équation (M) intégrable.

Suppoſons, par exemple, que $h+fm+bm.(m-1)$

$= 0$, alors $B = 0$, donne $C = 0$, $D = 0$, $E = 0$; & par conſéquent $v = Ax^m$ & la transformée ſera $\{m.(m-1).(a+bx^n)+m.(c+fx^n)+(g+hx^n)\} Ax^m dx^s = 0$, dont on connoît l'intégrale.

Si $h+f(m+n)+b(m+n).(m+n-1) = 0$, alors on aura $C = 0$, & par conſéquent $D = 0$, $E = 0$; on aura donc $v = Ax^m + Bx^{m+n}$.

Si $h+f(m+2n)+b(m+2n).(m+n-1) = 0$, alors $D = 0$ donne auſſi $E = 0$, & $v = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n}$. Donc en général en ſuppoſant i un nombre entier poſitif ou zéro, l'équation propoſée (M) ſera intégrable toutes les fois qu'on aura $h+f(m+in)+b(m+in).(m+in-1) = 0$, ou $h = -f(m+in) - b(m+in).(m+in-1)$.

Equations de condition ſuivant leſquelles la premiere Serie ſera terminée & la formule (M) intégrable.

CCLXXIV.

Il y a cependant des cas dans leſquels cette méthode ne nous donneroit point l'intégrale que nous demandons; ce ſont ceux dans leſquels le dénominateur de nos coefficients s'évanouiroit; par exemple, ſi on avoit $c = -a.(2m+in+n-1)$.

CCLXXV.

2°. Je ſuppoſe maintenant $v = Ax^k + Bx^{k-n} + Cx^{k-2n} + Dx^{k-3n} + Ex^{k-4n} +$ &c. Je fais les mêmes calculs que nous venons de faire plus haut: ils me donnent les valeurs de v, dv, ddv; je ſubſtitue ces valeurs

Seconde Serie.

dans l'équation (M), j'aurai la transformée ſuivante (P)
$\{h+fk+bk.(k-1)\}Ax^{k+n}dx^2+\{(g+ck+ak.(k-1))A+(h+f(k-n)+b(k-n).(k-n-1))B\}x^k dx^2+\{(g+(k-n)c+(k-n).(k-n-1)a)B+(h+(k-2n)f+(k-2n).(k-2n-1)b)C\}x^{k-n}dx^2+\{(g+(k-2n)c+(k-2n).(k-2n-1)a)C+(h+(k-3n)f+(k-3n).(k-3n-1)b)D\}x^{k-2n}dx^2+\{(g+(k-3n)c+(k-3n).(k-3n-1)a)D+(h+(k-4n)f+(k-4n).(k-4n-1)b)E\}x^{k-3n}dx^2+\{g+(k-4n)c+(k-4n).(k-4n-1)a)\}Ex^{k-4n}dx^2+$ &c.

Maintenant je fais ſur cette transformée les mêmes opérations que j'ai faites ſur la transformée (N) ; j'égale à zéro les termes homogenes : j'aurai par ce moyen les valeurs des coefficients A, B, C, D, E, & auſſi celle de l'expoſant k. Je trouve d'abord

$$h+fk+bk(k-1)=0$$

& en ſuppoſant k connu & déterminé, on a

$$h=-fk-bk.(k-1).$$

Subſtituant dans les différentes équations des termes homogenes pour h cette valeur, je trouve

$$B=\frac{A.(g+ck+ak.(k-1))}{fn+bn.(2k-n-1)}$$

$$C=\frac{B.(g+c(k-n)+a(k-n).(k-n-1))}{2fn+2bn.(2k-2n-1)}$$

$$D=\frac{C.(g+c(k-2n)+a(k-2n).(k-2n-1))}{3fn+3bn.(2k-3n-1)}$$

$$E=\frac{D.(g+c(k-3n)+a(k-3n).(k-3n-1))}{4fn+4bn(2k-4n-1)}$$

&c.

A ſera ici comme dans la ſerie (N) une quantité conſtante arbitraire, de laquelle dépendra la détermination de tous les autres coefficients; & en général ſi on ſuppoſe dans cette ſerie (P)

$$g = -c(k-in) - a(k-in).(k-in-1),$$

i étant un nombre entier poſitif ou zéro, la ſerie s'arrêtera, & l'on aura l'intégrale de l'équation (M).

Cas dans leſquels cette ſeconde Serie ſera terminée & la formule (M) intégrable.

Par exemple, ſi $i = 0$, on a B, C, D, E égaux à zéro, & par conſéquent $v = Ax^k$: ſi $i = 1$, on aura $v = Ax^k + Bx^{k-n}$, & $C = 0$, $D = 0$, $E = 0$; & ainſi de ſuite.

CCLXXVI.

Réunion de tous les cas d'intégrabilité précédents.

COROLLAIRE. De ce que nous venons de dire il s'enſuit que l'équation $(a+bx^n)x^2ddv + (c+fx^n)xdxdv + (g+hx^n)vdx^2 = 0$, dans laquelle

$$g = -cm - am.(m-1)$$

& . . . . . $h = -fk - bk.(k-1)$

ſera intégrable toutes les fois qu'on aura $f(-m-in) = h + b(m+in).(m+in-1)$, ou $c.(-k+in) = g + a(k-in).(k-in-1)$; ou bien en mettant pour h & g leurs valeurs, on trouvera l'équation intégrable, lorſque $f = \frac{[(m+in).(m+in-1) - k.(k-1)]b}{k-m-in} =$ (en faiſant la diviſion) $[1-k-m-in]b$; ou lorſque $c = \frac{[(k-in).(k-in-1) - m.(m-1)]a}{m-k+in} = (1-k-m+in)a$.

On a donc deux façons différentes de trouver une infinité de cas dans leſquels la propoſée eſt intégrable; &

dans chacun de ces cas on trouvera algébriquement la valeur de v en x, en cherchant celle des coefficients B, C, D, E dont le nombre alors eſt limité.

CCLXXVII.

SCHOLIE. Il faut bien remarquer que les intégrales trouvées par la méthode précédente ne ſont que des cas particuliers des intégrales completes, que nous a donnés la ſuppoſition de quelque conſtante $= 0$, ou $= \infty$. Mais en ſuivant la méthode indiquée dans le Problême qui eſt à la tête de ce Chapitre, on trouvera les intégrales completes de tous ces cas différents.

CCLXXVIII.

Réduction de la formule (M) en une équation différentielle du premier ordre.

Nous allons maintenant examiner les équations différentielles du premier degré qui réſultent de notre formule (M), équations qu'on intégrera dans les mêmes cas dans leſquels on integre cette formule.

Soit ſuivant la méthode expoſée dans le Chapitre VI. Sect. II. $v = c^{\int z\,dx}$, & par conſéquent $z = \frac{dv}{v\,dx}$; on voit bien que connoiſſant la valeur de v, on aura ſur le champ celle de z en x. L'hypotheſe précédente nous donne $dv = c^{\int z\,dx} z\,dx$; & comme dx eſt ſuppoſé conſtant, on a $ddv = c^{\int z\,dx}.(dx\,dz + z^2\,dx^2)$. Subſtituant ces valeurs dans (M), on a pour transformée $(a + bx^n).x^2 c^{\int z\,dx}.(dx\,dz + z^2\,dx^2) + (c + fx^n).c^{\int z\,dx} z\,x\,dx^2 + (g + hx^n).c^{\int z\,dx} dx^2 = 0$; laquelle

devient après les réductions ordinaires (V) $(a+bx^n).x^2dz+(c+fx^n)zxdx+(a+bx^n).z^2x^2dx+(g+hx^n)dx=0$, équation différentielle du premier degré.

Cas dans lesquels la réduite (V) eſt intégrable.

Donc (Art. CCLXXIII.) en y ſuppoſant

$$g=-cm-am.(m-1),$$

& . . . . . $h=-fk-bk.(k-1)$,

elle ſera intégrable, toutes les fois qu'on aura ou bien $f=\left\{\frac{(m+in).(m+in-1)-k.(k-1)}{k-m-in}\right\}b=(1-k-m-in)b$; ou bien $c=\left\{\frac{(k-in).(k-in-1)-m.(m-1)}{m-k+in}\right\}a=(1-k-m+in)a$; & de plus après avoir trouvé pour ces cas la valeur de v, on aura celle de z au moyen de l'équation $z=\frac{dv}{vdx}$.

CCLXXIX.

Transformations de l'équation (V) en d'autres de trois termes.

SCHOLIE. Mais afin que l'on voie mieux les équations particulieres renfermées dans cette équation générale (V), transformons-la dans une autre qui n'ait que trois termes de la forme ſuivante $Pdz+Qz^2dx+Rdx=0$, P, Q & R étant des fonctions de x. Or nous pouvons faire cette transformation de pluſieurs manieres différentes que nous allons examiner ici ſéparément.

CCLXXX.

Premiere transformation.

PREMIERE TRANSFORMATION. Soit dans l'équation (V) $z=Ty$, T étant une fonction inconnue de x, on aura

$dz = y\,dT + T\,dy$; & la transformée ſera $(a+bx^n)\cdot yx^2\,dT + (a+bx^n)\cdot x^2 T\,dy + (c+fx^n)\cdot Tyx\,dx + (a+bx^n)\,y^2T^2x^2\,dx + (g+hx^n)\,dx = 0$. Soit maintenant $(c+fx^n)\,Tyx\,dx + (a+bx^n)\cdot yx^2\,dT = 0$, ou en effaçant yx qui eſt commun aux deux termes $(c+fx^n)\cdot T\,dx + (a+bx^n)\cdot x\,dT = 0$, on a $\frac{(c+fx^n)\,dx}{(a+bx^n)\,x} + \frac{dT}{T} = 0$, équation de laquelle il faut tirer la valeur de T.

Pour cela je donne au premier membre la forme ſuivante $\frac{acx^{-1}\,dx + afx^{n-1}\,dx}{aa+abx^n}$; j'y ajoute & j'en retranche en même temps $\frac{bcx^{n-1}\,dx}{aa+abx^n}$, j'aurai $\frac{acx^{-1}\,dx + bcx^{n-1}\,dx + afx^{n-1}\,dx - bcx^{n-1}\,dx}{aa+abx^n}$, ou bien $\frac{c\,dx}{ax} + \frac{(af-bc)\,x^{n-1}\,dx}{a\cdot(a+bx^n)}$. L'équation entiere ſera donc $\frac{C\,dx}{ax} + \frac{(af-bc)\,x^{n-1}\,dx}{a\cdot(a+bx^n)} + \frac{dT}{T} = 0$. Son intégrale eſt, comme on le ſait, $\frac{c}{a}\,lx + \frac{(af-bc)}{abn}\cdot l(a+bx^n) + lT = 0$, en ſuppoſant la conſtante $= 0$; donc $lT = \frac{(bc-af)}{abn}\,l(a+bx^n) - \frac{c}{a}\,lx$; d'où l'on tire en repaſſant des logarithmes aux nombres $T = \frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}}}{x^{\frac{c}{a}}}$.

Par conſéquent la ſuppoſition qu'on doit faire pour $z = Ty$, eſt celle-ci $z = \frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}}\,y}{x^{\frac{c}{a}}}$. Cette

ſuppoſition nous donne $dz = \frac{(bc-af)}{a} . (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}-1} yx^{n-\frac{c}{a}-1} dx + (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} x^{-\frac{c}{a}} dy - \frac{c}{a} . (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} yx^{-\frac{c}{a}-1} dx$. Donc en ſubſtituant pour z & dz ces valeurs dans l'équation (V), on aura celle-ci $\frac{(bc-af)}{a} . (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} yx^{n+1-\frac{c}{a}} dx + (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1} x^{2-\frac{c}{a}} dy - \frac{c}{a} . (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1} yx^{1-\frac{c}{a}} dx + (c+fx^n) . (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} yx^{1-\frac{c}{a}} dx + (a+bx^n)^{\frac{2bc-2af}{abn}+1} y^2 x^{2-\frac{2c}{a}} dx + (g+hx^n) dx = 0$. Pour réduire cette équation, je la diviſe par la quantité $(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1} x^{2-\frac{c}{a}}$ qui multiplie dy, j'ai $dy - \frac{cydx}{ax} - \frac{(af-bc) yx^{n-1} dx}{a . (a+bx^n)} + \frac{(c+fx^n) ydx}{(a+bx^n) . x} + (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} y^2 x^{-\frac{c}{a}} dx + \frac{(g+hx^n) x^{\frac{c}{a}-2} dx}{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1}} = 0$.

Maintenant comme $\frac{cydx}{ax} + \frac{(af-bc) yx^{n-1} dx}{a . (a+bx^n)}$ & $\frac{(c+fx^n) ydx}{(a+bx^n) . x}$ ſont deux expreſſions différentes de la même grandeur, & que dans l'équation précédente elles ſont de ſignes contraires, elles s'y détruiſent. Conſéquemment il ne nous reſte plus que (A) $dy + \frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} y^2 dx}{x^{\frac{c}{a}}} + \frac{(g+hx^n) x^{\frac{c}{a}-2} dx}{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1}} = 0$; Equation transformée (A) qui n'a plus que trois termes.

équation intégrable, ſi $g = -cm - am.(m-1)$
& . . . . . $h = -fk - bk.(k-1)$.
toutes les fois qu'on aura ou bien $f = (1-k-m-in)b$,
ou bien . . . . . $c = (1-k-m+in)a$,
i repréſentant un nombre entier quelconque.

Examinons ſéparément les cas particuliers de cette équation.

CCLXXXI.

Equations particulieres de trois termes qu'on peut tirer de cette équation.

Suppoſons 1° que $bc = af$, l'équation (A) devient $(B)\ dy + y^2 x^{-\frac{c}{a}} dx + \frac{(g+hx^n)x^{\frac{c}{a}-2} dx}{a+bx^n} = 0$.
Soit $x^{\frac{a-c}{c}} = t$, on aura $x = t^{\frac{a}{a-c}}$; $dx = \frac{a}{a-c} t^{\frac{a}{a-c}-1} dt$;
$x^{-\frac{c}{a}} = t^{\frac{-c}{a-c}}$; $x^{\frac{c}{a}-2} = t^{\frac{c-2a}{a-c}}$. Faiſant ces ſubſtitutions dans l'équation précédente, on a celle-ci $dy + \frac{a}{a-c} y^2 t^{\frac{a-c}{a-c}-1} dt + \frac{a.(g+ht^{\frac{an}{a-c}}) t^{\frac{c-2a+a}{a-c}-1} dt}{(a-c).(a+bt^{\frac{an}{a-c}})} = 0$; c'eſt-à-dire qu'en réduiſant on aura $(Y)\ dy + \frac{ay^2 dt}{a-c} + \frac{a.(g+ht^{\frac{an}{a-c}}) dt}{(a-c).(a+bt^{\frac{an}{a-c}}) tt} = 0$. Donc (Corollaire, Article CCLXXVI.) cette équation (Y) ſera intégrable, ſi

Premiere équation particuliere.

Dans quels cas elle eſt intégrable.

$g = -cm - am(m-1)$
& . . . . . $h = -fk - bk(k-1)$;

toutes les fois que . . . $f=(1-k-m-in)\,b$,
ou que . . . . . $c=(1-k-m+in)\,a$.
Donc à cauſe de l'hypotheſe préſente de $bc=af$, qui donne $f=\frac{bc}{a}$, l'équation (Y) ſera intégrable, ſi

$$g=-cm-am.(m-1)$$

& . . . . . $h=-\frac{b}{a}\{ck+ak.(k-1)$,
toutes les fois qu'on aura $c=(1-k-m-in)$,
ou . . . . . $c=(1-k-m+in)$;
c'eſt-à-dire, toutes les fois qu'on aura $\frac{c+ak+(m-1)a}{an}=\pm i=$ par conſéquent un nombre entier poſitif ou négatif.

CCLXXXII.

Si de plus $c=0$, l'équation (Y) devient $dy+y^2dt+\frac{(g+ht^n)\,dt}{(a+bt^n)\,tt}=0$, & en mettant pour g & h leurs valeurs trouvées plus haut, on a (Z) $dy+y^2dt=\frac{(am.(m-1)+bk.(k-1)\,t^n)\,dt}{(a+bt^n)\,tt}$; équation intégrable toutes les fois qu'on aura $\frac{k+m-1}{n}=\pm i$. Donc ſi on ſuppoſe alternativement k, ou $m=0$, dans le premier cas l'équation $dy+y^2dt=\frac{am.(m-1)\,dt}{(a+bt^n)\,tt}$ ſera intégrable, toutes les fois que $\frac{m-1}{n}$ ſera égal à un nombre entier poſitif ou négatif; & ſi on ſuppoſe $m=0$, l'équation $dy+y^2dt=\frac{bk.(k-1)\,t^n\,dt}{(a+bt^n)\,tt}$ ſera intégrable, lorſque $\frac{k-1}{n}$ ſera égal à un nombre entier poſitif ou négatif.

Seconde équation particuliere.

Dans quels cas intégrable.

CCLXXXIII.

Mais si l'on a $c = a$, alors l'équation (B) devient $dy + \frac{y^2 dx}{x} = -\frac{(g + hx^n)\,dx}{(a + bx^n)\,x}$; & en mettant pour g & pour h leurs valeurs, on a (X) $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{(amm + bkkx^n)\,dx}{(a + bx^n)\,x}$; équation intégrable, toutes les fois qu'on aura $\frac{k+m}{n}$ égal à un nombre entier positif ou négatif. Donc en supposant dans cette derniere équation $k = 0$, on aura la suivante $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{amm\,dx}{(a + bx^n)\,x}$; intégrable si $\frac{m}{n}$ est un nombre entier positif ou négatif; & en y supposant $m = 0$, on aura cette autre équation $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{bkkx^n dx}{a + bx^n}$; intégrable toutes les fois que $\frac{k}{n}$ sera un nombre entier positif ou négatif.

Troisieme équation particuliere.

Dans quels cas intégrable.

CCLXXXIV.

Reprenons maintenant l'équation (A) $dy + \frac{(a + bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}}\, y^2 dx}{x^{\frac{c}{a}}} + \frac{(g + hx^n)\, x^{\frac{c}{a}-2}\, dx}{(a + bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1}} = 0$; & supposons que dans cette équation $c = -a(n-1)$ on aura

$$x^{\frac{c}{a}} = x^{-n+1}$$

$$x^{\frac{c}{a}-2} = x^{-n-1}$$

$$\frac{bc-af}{abn} = \frac{b-f}{bn} - 1$$

$$\frac{bc-af}{abn} + 1 = \frac{b-f}{bn}.$$

Donc

Donc l'équation (A) devient (D) $dy + \frac{(a+bx^n)^{\frac{b-f}{bn}} y^2 x^{n-1} dx}{a+bx^n} + \frac{(g+hx^n)\,dx}{x^{n+1}.(a+bx^n)^{\frac{b-f}{bn}}} = 0.$

Soit dans cette équation (D) $(a+bx^n)^{\frac{b-f}{bn}} = t$,

on aura . . . $a+bx^n = t^{\frac{bn}{b-f}}$

$$x^n = \frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}$$

$$x = \frac{(t^{\frac{bn}{b-f}} - a)^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$$

$$dx = \frac{\left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} . t^{\frac{bn}{b-f}-1} dt}{b-f}.$$

Donc en faiſant ces ſubſtitutions dans l'équation (D), on aura la transformée ſuivante,

$$dy + \frac{y^2 . \left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right) . \left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} . t^{\frac{bn}{b-f}-1} . t\,dt}{(b-f)\, t^{\frac{bn}{b-f}} . \left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$+ \frac{\left\{g + h\left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right)\right\} . \left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} . t^{\frac{bn}{b-f}-1} dt}{(b-f) . \left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}+1} t}$$

$= 0$; c'eſt-à-dire, qu'en réduiſant on a (E) $dy + \frac{y^2 dt}{b-f}$

Quatrieme équation particuliere.

$$+\frac{b\cdot(bg-ah+ht^{\frac{bn}{b-f}})t^{\frac{bn}{b-f}-2}dt}{(b-f)\cdot(t^{\frac{bn}{b-f}}-a)^2}=0.$$

Dans quels cas elle eſt intégrable.

Si donc on ſuppoſe dans cette équation $g=-cm-am.(m-1)$; c'eſt-à-dire à cauſe de $c=-a(n-1)$, $g=am.(n-1)-am.(m-1)=am.(n-m)$, & $h=-fk-bk.(k-1)$, elle ſera intégrable, toutes les fois qu'on aura $\frac{k+m-n}{n}$ égale à i, c'eſt-à-dire à un nombre entier poſitif; ou bien encore lorſqu'on aura $\frac{f+b(m+k-1)}{bn}$ égal à un nombre entier négatif.

Si l'on a de plus dans l'équation $dy+\frac{y^2dt}{b-f}+\{b.abm(n-m)+afk+abk(k-1)-fk-bk.(k-1)t^{\frac{bn}{b-f}}\}\times\frac{t^{\frac{bn}{b-f}-2}dt}{(b-f).(t^{\frac{bn}{b-f}}-a)^2}=0$, ſi l'on a, dis-je, $f=b-bn$, alors on aura . . . . . $b-f=bn$

$$\frac{bn}{b-f}=1,$$

& l'équation précédente devient celle-ci $dy+\frac{y^2dt}{bn}+\frac{b[am.(n-m)-ak.(n-k)+k.(n-k)t]dt}{nt.(t-a)^2}=0$, laquelle ſera intégrable dans le cas où $\frac{k+m}{n}$ ſera égal à $\pm i$, c'eſt-à-dire à un nombre entier poſitif ou négatif. De là il ſuit qu'en ſuppoſant $k=n$, l'équation $dy+\frac{y^2dt}{bn}+\frac{abm.(n-m)dt}{nt.(t-a)^2}=0$ ſera intégrable, ſi $\frac{m}{n}$ eſt égal à un nombre entier quelconque. Si $m=n$, l'équation $dy+\frac{y^2dt}{bn}-\frac{[abk.(n-k)+bk.(n-k)t^2]dt}{nt.(t-a)^2}=0$ ſera intégrable, lorſque $\frac{k}{n}$ ſera un nombre entier quelconque.

CCLXXXV.

Seconde transformation pour l'équation (*V*).

Seconde Transformation. Soit reprise l'équation (*V*) $(a+bx^n)x^2dz+(c+fx^n)xzdx+(a+bx^n)z^2x^2dx+(g+hx^n)dx=0$, dans laquelle on suppose

$$g=-cm-am.(m-1)$$

& . . . . . $h=-fk-bk.(k-1)$,

& qui est alors intégrable, toutes les fois que

$$f=(1-k-m-in)b,$$

ou que . . . . $c=(1-k-m+in)a$,

nous la transformerons encore en une équation de trois termes en faisant $z=Ty+S$, T & S représentent des fonctions de x. Cette supposition nous donne

$$dz=Tdy+ydT+dS$$

$$z^2=T^2y^2+2TSy+SS,$$

& pour transformée l'équation suivante (*F*) $(a+bx^n)Tx^2dy+(a+bx^n)x^2ydT+(a+bx^n)x^2dS+(c+fx^n)Tyxdx+(c+fx^n)Sxdx+(a+bx^n)T^2y^2x^2dx+2(a+bx^n)TSyx^2dx+(a+bx^n)S^2x^2dx+(g+hx^n)dx=0$. Maintenant afin de faire évanouir le terme affecté de y, supposons $(a+bx^n)xdT+2.(a+bx^n)TSxdx+(c+fx^n).Tdx=0$, on aura $\frac{dT}{T}+2Sdx+\frac{(c+fx^n)dx}{(a+bx^n)x}=0$. Soit $T=x^p$, de telle sorte qu'après avoir divisé par $(a+bx^n)Tx^2$, le coefficient de ydx soit une puissance simple de x; on aura $\frac{pdx}{x}+2Sdx+\frac{(c+fx^n)dx}{(a+bx^n).dx}=0$, & par conséquent

$\frac{p}{x} + 2S + \frac{c+fx^n}{(a+bx^n)x} = 0$: donc $S = -\frac{p}{2x}$ $\frac{-c-fx^n}{2x.(a+bx^n)} = \frac{-ap-c-(f+bp)x^n}{2x.(a+bx^n)}$: donc $dS =$

$$\frac{-(fnx^{n-1}+bnpx^{n-1})dx \cdot 2x(a+bx^n)}{4x^2.(a+bx^n)^2}$$

$$\frac{-(2adx+2b(n+1)x^n dx).-(c+ap+(f+bp)x^n)}{4x^2.(a+bx^n)^2}$$

$=$ (en réduisant)

$$\frac{a(c+ap)dx-a(n-1).(f+bp)x^n dx+b(f+bp)x^{2n}dx+b(n+1).(c+ap)x^n dx}{2x^2.(a+bx^n)};$$

substituant dans l'équation (F) pour T, T^2, S, S^2, dS leurs valeurs, effaçant le terme que nous y avons supposé égal à zéro & réduisant, on aura $(a+bx^n)x^{p+2}dy$

$$+(a+bx^n)y^2x^{2p+2}dx +$$

$$\frac{2acdx+2a^2pdx-2afnx^n dx+2afx^n dx}{4.(a+bx^n)} +$$

$$\frac{2abpx^n dx+2bfx^{2n}dx+2b^2px^{2n}dx}{4.(a+bx^n)} +$$

$$\frac{2bcnx^n dx+2bcx^n dx+2abpx^n dx-ccdx}{4.(a+bx^n)}$$

$$\frac{-2cfx^n dx-ffx^{2n}dx+a^2p^2dx}{4.(a+bx^n)} +$$

$$\frac{2abp^2x^n dx+b^2p^2x^{2n}dx}{4.(a+bx^n)} + gdx+hx^n dx = 0;$$

& en divisant par $a+bx^n$ les termes dont ce binome est un diviseur exact, on aura la transformée suivante

$$(a+bx^n).x^{p+2}dy + (a+bx^n)y^2x^{2p+2}dx +$$

$$\frac{p.(p+2).(a+bx^n)dx}{4} + \frac{(c+2g)dx+(f+2h)x^n dx}{2}$$

$\frac{-ccdx+2n(bc-af)x^n dx-2cfx^n dx-ffx^{2n}dx}{4\cdot(a+bx^n)} = 0$; & enfin en diviſant par $(a+bx^n)x^{p+2}$, on a l'équation

Equation transformée (*H*).

(*H*) $dy+y^2x^p dx+\frac{p\cdot(p+2)dx}{4x^{p+2}}+\frac{(c+2g)dx+(f+2h)x^n dx}{2x^{p+2}\cdot(a+bx^n)}$
$-\frac{(c+fx^n)^2 dx+2n(bc-af)x^n dx}{4\cdot(a+bx^n)^2 x^{p+2}} = 0$. Or cette équation ſera intégrable, dans les cas où g étant $= -cm-am(m-1)$ & $h = -fk-bk\cdot(k-1)$, on aura $f=(1-k-m-in)b$, ou $c=(1-k-m+in)a$; c'eſt-à-dire, toutes les fois que l'une des deux quantités $\frac{-(k+m-1)b-f}{bn}$, ou $\frac{(k+m-1)a+c}{an}$ ſera égale à un nombre entier poſitif.

Dans quels cas elle eſt intégrable.

CCLXXXVI.

Maintenant faiſons 1°. $bc=af$, ou $f=\frac{bc}{a}$, l'équation (*H*) devient celle-ci $dy+y^2x^p dx+\frac{p\cdot(p+2)dx}{4x^{p+2}}+\frac{(ac+2ag)dx+(bc+2ah)x^n dx}{2ax^{p+2}\cdot(a+bx^n)}-\frac{\left(cc+\frac{2bccx^n}{a}+\frac{b^2c^2x^{2n}}{aa}\right)dx}{4x^{p+2}\cdot(a+bx^n)^2} = 0$; c'eſt-à-dire, en réduiſant $dy+y^2x^p dx+\frac{p\cdot(p+2)dx}{4x^{p+2}}+\frac{(g+hx^n)dx}{x^{p+2}\cdot(a+bx^n)}+\frac{cdx}{2ax^{p+2}}-\frac{ccdx}{4aax^{p+2}} = 0$; ou bien en mettant au même dénominateur les deux derniers termes & retranchant en même temps $\frac{aadx}{4aax^{p+2}}$, on aura (*L*)

Equations particulieres qu'on peut tirer de la transformée (*H*).

Premiere équation particuliere.

$dy+y^2x^p dx+\frac{(p+1)^2 dx}{4x^{p+2}}-\frac{(a-c)^2 dx}{4a^2x^{p+2}}+\frac{(g+hx^n)dx}{(a+bx^n)x^{p+2}} = 0$. En ſuppoſant dans cette équation $g=-cm-$

Quels ſont ſes cas d'intégrabilité.

$am(m-1)$ & $h=-\frac{b}{a}\times ck+ak(k-1)$, elle ſera intégrable toutes les fois que $\frac{(k+m-1)a+c}{an}$ ſera un nombre entier poſitif ou négatif. Faiſons de plus dans cette équation $c=a$, on aura en mettant pour g & h leurs valeurs, $dy+y^2x^p\,dx+\frac{(p+1)^2\,dx}{4x^{p+2}}-\frac{(amm+bkkx^n)\,dx}{(a+bx^n)x^{p+2}}=0$, qui ſera intégrable ſi $\frac{k+m}{n}$ eſt égal à un nombre entier quelconque.

CCLXXXVII.

2°. Soit dans l'équation (H) $b=0$, elle ſe change en celle-ci $dy+y^2x^p\,dx+\frac{p\cdot(p+2)\,dx}{4x^{p+2}}+\frac{(2ac+4ag)\,dx}{4a^2x^{p+2}}+\frac{(af+2ah)x^n\,dx}{2a^2x^{p+2}}-\frac{(cc+2cfx^n+ffx^{2n}+2afnx^n)\,dx}{4a^2x^{p+2}}=0$; & en retranchant & ajoutant comme plus haut $\frac{dx}{4x^{p+2}}$, on a (O) $dy+y^2x^p\,dx+\frac{(p+1)^2a^2\,dx}{4a^2x^{p+2}}-\frac{(a-c)^2\,dx}{4a^2x^{p+2}}+\frac{4ag\,dx}{4a^2x^{p+2}}+\frac{(af+2ah-afn-cf)x^n\,dx}{2aax^{p+2}}-\frac{ffx^{2n}\,dx}{4aax^{p+2}}=0$,

Seconde équation particuliere.

équation intégrable, ſi . . $g=-cm-am(m-1)$ & . . . . . $h=-fk$,

Dans quels cas elle ſe peut intégrer.

toutes les fois qu'on aura $f=(1-k-m-in)b$, ou $c=(1-k-m+in)a$, c'eſt-à-dire toutes les fois que $f=0$, ou que $\frac{(k+m-1)a+c}{an}$ eſt un nombre entier poſitif. Dans le cas où $f=0$, l'équation (O) en y ſuppoſant $(p+1)^2a^2-(a-c)^2+4ag=AA$ devient $dy+A^2x^{-p-2}\,dx+y^2x^p\,dx=0$, qui eſt l'équation de Ricati. Donc (Sect. I. Chap. IX. Art. CXIX.) elle s'inté-

grera toutes les fois qu'on aura $-p-2=\frac{(2h+1)\times-p-4h}{2k+1}$, h représentant un nombre entier positif f en commençant par l'unité, c'est-à-dire, lorsque p sera $=1$; ce qui est évident, puisqu'alors l'équation devient $x^2dy+y^2x^4dx+adx=0$, laquelle est dans le cas de la formule de M. Bernoulli traitée dans le Chapitre VII. Sect. I.

CCLXXXVIII.

Soit dans l'équation (O) $a^2(p+1)^2-(a-c)^2+4ag=\alpha a^2$, & $af-naf-2afk-cf=a\epsilon f$, on aura $g=\frac{\alpha a^2+(a-c)^2-a(p+1)^2}{4a}$, & $c=a-na-2ak-a\epsilon$. Donc mettant cette valeur de c dans g, on a $g=\frac{\alpha a+a(n+2k+\epsilon)^2}{4}-\frac{a(p+1)^2}{4}$. Après avoir fait ces substitutions, on a (Q) $dy+y^2x^pdx+\frac{\alpha dx}{4x^{p+2}}+\frac{\epsilon fx^ndx}{2ax^{p+2}}-\frac{ffx^{2n}dx}{4a^2x^{p+2}}=0$. Dans cette équation on doit avoir $g=-cm-am.(m-1)$: mais $c=a-na-2ak-a\epsilon$, & $g=\frac{\alpha a+a(n+2k+\epsilon)^2}{4}-a(p+1)^2$; donc on aura $g=am.(n+2k+\epsilon)-amm$. Donc $4m\times(n+2k+\epsilon)=\alpha+(n+2k+\epsilon)^2-(p+1)^2+4mm$. Donc $(n+2k+\epsilon)^2-4m.(n+2k+\epsilon)+4mm=(p+1)^2-\alpha$. Donc enfin $n+2k+\epsilon=nm\pm\sqrt{(p+1)^2-\alpha}$; & l'équation sera intégrable, toutes les fois qu'on aura $\frac{m-n-k-\epsilon}{n}$, ou $\frac{-n-\epsilon\pm\sqrt{(p+1)^2-\alpha}}{2n}$ égal à un nombre entier positif.

Troisieme équation particuliere.

Dans quels cas elle se peut intégrer.

CCLXXXIX.

Soit dans l'équation (Q) $\alpha=0$ & $\epsilon=0$, elle devient

Quatrieme équation particuliere.

$dy + y^2 x^p dx = \frac{ff x^{2n-p-2} dx}{4aa}$, intégrable toutes les fois qu'on aura $\frac{-n \pm (p+1)}{2n}$ égal à un nombre entier positif. C'eſt ce qui eſt évident par ce que nous avons déja vu tant de fois dans ce Chapitre, & ce qu'on retrouveroit encore par l'Article CXIX. du Chapitre IX. Sect. I. puiſque cette équation eſt celle de Ricati, qui eſt par conſéquent intégrable dans tous les cas où $m = \frac{(2h \pm 1)-n-4h}{2h \mp 1}$, h repréſentant un nombre entier poſitif. Mettant ici pour m ſa valeur $2n-p-2$, & pour n ſa valeur p, on retrouvera pour l'intégrabilité la même condition que ci-deſſus.

Ses cas d'intégrabilité.

CCXC.

Cinquieme équation particuliere (φ).

Soit dans (Q) α ſeulement $= 0$, on aura (φ) $dy + y^2 x^p dx + \frac{e f x^n dx}{2a x^{p+2}} - \frac{ff x^{2n} dx}{4a^2 x^{p+2}} = 0$; équation intégrable, toutes les fois que $\frac{-n-e \pm (p+1)}{2n} = i$, c'eſt-à-dire un nombre entier poſitif. On aura donc $-n-e \pm (p+1) = 2in$, & par conſéquent $e = \pm (p+1) - n.(2i+1)$: de-là il ſuit que l'équation $dy + y^2 x^p dx = \frac{ff x^{2n-p-2} dx}{4aa} + \frac{fn(2i+1) \mp f(p+1) x^{n-p-2} dx}{2a}$ eſt toujours intégrable. Si dans cette équation on ſuppoſe 1°. $p = 0$, $n = 2$; 2°. $p = 0$, $n = 1$; 3°. $p = -1$, $n = 1$, on aura les équations ſuivantes qui ſeront intégrables

Ses cas d'intégrabilité.

Autres équations particulieres intégrables qui viennent de l'équation (φ).

$dy + y^2 dx = \frac{ff x^2 dx}{4aa} + \frac{f(4i+2 \mp 1) dx}{2a^2}$, $dy + y^2 dx = \frac{ff dx}{4aa} + \frac{f(2i+1 \pm 1) dx}{2ax}$, $dy + \frac{y dx}{x} + \frac{ff x dx}{4aa} + \frac{f(2i+1) dx}{2a}$.

CCXCI.

CCXCI.

Soit dans l'équation (Q) ϵ ſeulement $= 0$, on aura l'équation ſuivante (ξ) $dy + y^2 x^p dx = \frac{ff x^{2n-p-2} dx}{4aa} - \frac{\alpha dx}{4x^{p+2}}$, laquelle ſera intégrable toutes les fois qu'on aura $-\frac{n \pm \sqrt{(p+1)^2 - \alpha}}{2n} = i$, c'eſt-à-dire un nombre entier poſitif. On aura donc $2in + n = \pm\sqrt{[(p+1)^2 - \alpha]}$; & en élevant au quarré $n^2(2i+1)^2 = (p+1)^2 - \alpha$. Donc $\alpha = (p+1)^2 - n^2.(2i+1)^2$. Donc l'équation $dy + y^2 x^p dx = \frac{ff x^{2n-p-2} dx}{4aa} + \frac{[n^2(2i+1)^2 - (p+1)^2] dx}{4x^{p+2}}$ eſt toujours intégrable. Donc en ſuppoſant $p = 0$, $\frac{ff}{4aa} = A$, on aura l'équation $dy + y^2 dx = A x^{2n-2} dx + \frac{[n^2.(2i+1)^2 - 1] dx}{4xx}$ qui eſt toujours intégrable. Donc en ſuppoſant ſucceſſivement $p = 0$, $n = 1$; $p = 0$, $n = 2$; $p = 0$, $n = 3$, &c. on aura les équations ſuivantes

$$dy + y^2 dx = A dx + \frac{i(i+1) dx}{xx}$$

$$dy + y^2 dx = A x^2 dx + \frac{4i.(i+1) dx}{xx}$$

$$dy + y^2 dx = A x^4 dx + \frac{9i.(i+1) dx}{xx},$$

& une infinité d'autres qui ſeront intégrables.

Sixieme équation particuliere (ξ).

Ses cas d'intégrabilité.

Autres équations intégrables qui viennent de l'équation (ξ).

CCXCII.

Je reprends l'équation (Q) $dy + y^2 x^p dx = \frac{(ff x^{2n} - 2a\epsilon f x^n - \alpha a^2) dx}{4aax^{p+2}}$, & je ſuppoſe $\alpha = -\epsilon^2$, on aura $dy + y^2 x^p dx = (ff x^{2n} - 2a\epsilon f x^n + a^2\epsilon^2) \frac{dx}{4aax^{p+2}}$

Septieme équation particuliere.

Dans quels cas elle eſt intégrable.

$= \frac{(fx^n - a\epsilon)^2 dx}{4aax^{p+2}}$; & cette équation ſera intégrable, toutes les fois que $-n-\epsilon-\sqrt{(p+1)^2+\epsilon^2} = 2in$. Donc alors on aura $2in+n+\epsilon = \pm\sqrt{(p+1)^2+\epsilon^2}$; & en quarrant les deux membres, on a $4i^2n^2+4in^2+4\epsilon in+n^2+2\epsilon n+\epsilon\epsilon = (p+1)^2+\epsilon\epsilon$; donc en réduiſant $\epsilon = \frac{(p+1)^2-n^2(2i+1)^2}{2n.(2i+1)}$. Donc l'équation $dy+y^2x^p dx = \left(\frac{n^2.(2i+1)^2-(p+1)^2}{4n.(2i+1)} + \frac{fx^n}{2a}\right)^2 \frac{dx}{x^{p+2}}$ eſt toujours intégrable. Donc en donnant ſucceſſivement à p & à n différentes valeurs, on aura différentes équations intégrables. Soit, par exemple, $p = 0$, on aura l'équation intégrable $dy+y^2dx = \left(\frac{n^2.(2i+1)^2-1}{4n.(2i+1)} + \frac{fx^n}{2a}\right)^2 \times \frac{dx}{xx}$. Si $p = -1$, on aura pour lors $dy+\frac{y^2dx}{x} = \left(\frac{n(2i+1)}{4} + \frac{fx^n}{2a}\right)^2 \frac{dx}{x}$ qui eſt intégrable.

CCXCIII.

Soit dans l'équation (Q) $x^{p+1} = t$,

on aura . . . . . $x = t^{\frac{1}{p+1}}$

$$x^n = t^{\frac{n}{p+1}}$$

$$x^{p+2} = t^{\frac{p+2}{p+1}}$$

$$dx = \frac{1}{p+1} t^{\frac{-p}{p+1}} dt$$

$$\frac{dx}{x^{p+2}} = \frac{dt}{(p+1)tt}$$

$$x^p dx = \frac{dt}{p+1}.$$

Donc la transformée ſera $dy + \frac{y^2\,dt}{p+1} = \left\{\frac{n^2(2i+1)^2-(p+1)^2}{2n.(2i+1)} \right.$ Huitieme équation particuliere intégrable.

$\left. \frac{ft^{\frac{n}{p+1}}}{2a}\right\} \times \frac{dt}{(p+1)\,tt}$; ou $(p+1)\,dy + y^2\,dt =$

$\left\{\frac{n^2.(2i+1)^2-(p+1)^2}{2n.(2i+1)} + \frac{ft^{\frac{n}{p+1}}}{2a}\right\} \times \frac{dt}{tt}$; équation qui eſt intégrable.

CCXCIV.

En ſuivant cette méthode on trouveroit encore les cas d'intégrabilité d'un grand nombre d'équations différentielles qui ne ſont pas intégrables abſolument ; la difficulté ne conſiſteroit que dans la longueur du calcul. Par exemple, ſi l'on veut chercher les cas d'intégrabilité de l'équation $(a + bx^n + cx^{2n})\,x^2\,ddv + (f + gx^n + hx^{2n})\,x\,dx\,dv + (p + qx^n + rx^{2n}).v\,dx^2 = 0$, on les trouveroit en faiſant $v = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} +$ &c. ou bien $v = Ax^k + Bx^{k-n} + Cx^{k-2n} +$ &c. On détermineroit les coefficients $A, B, C, D,$ &c. de la même maniere que nous avons déterminé ceux des Articles CCLXXIII. & CCLXXV. ; mais on doit remarquer ici qu'il faut que deux de ces coefficients ſoient égaux à zéro, pour que les autres s'évanouiſſent. C'eſt ce dont il eſt aiſé de ſe convaincre en mettant dans la propoſée pour v, dv, ddv leurs valeurs tirées de l'une des deux ſeries précédentes. Par exemple, ſi on ſe ſert de la ſerie premiere, on trouvera qu'afin que $v = Ax^m$ il faut que $p + fm + am(m-1) = 0$, & qu'en même temps $q + gm +$

Application de la méthode précédente à une formule différentielle du ſecond ordre plus compliquée que la formule (*M*).

$bm.(m-1)=0$ & $r+hm+cm(m-1)=0$. Pour que $v=Ax^m+Bx^{m+n}$ il ſera néceſſaire qu'on ait

1°. $B=A.\{q+gm+bm(m-1)\}$

2°. $0=p+fm+am(m-1)$

3°. $0=r+h(m+n)+c(m+n).(m+n-1)$

4°. $n^2.\{h+c(2m+n-1)\}.\{f+a(2m+n-1)\}+\{q+gm+bm.(m-1)\}.\{q+g.(m+n)+b.(m+n).(m+n-1)\}=0$, & ainſi de ſuite.

CHAPITRE X.

Examen de pluſieurs équations différentielles du ſecond ordre, intégrables dans les mêmes cas que d'autres équations du même ordre qui ont un terme de moins.

CCXCV.

Application à une équation différentielle du ſecond ordre.

THEOREME. L'Equation différentielle du ſecond ordre $ddu+\zeta dudx+uXdx^2+\zeta dx^2=0$ eſt intégrable dans les mêmes cas dans leſquels on peut intégrer la ſuivante $ddu+\zeta dudx+uXdx^2=0$, qui, comme on le voit, a un terme de moins. ζ, X & ζ dans la premiere équation, ζ & X dans la ſeconde ſont des fonctions de x.

DEMONSTRATION. Je ſuppoſe $du+tQdx=0$; t & Q étant deux indéterminées; ſubſtituant pour du & ddu

leurs valeurs dans la proposée, la divisant ensuite par $Q\,dx$ & changeant les signes, on aura $dt + \frac{t\,dQ\,dx}{Q\,dx} + t\zeta\,dx - \frac{u\,X\,dx}{Q} - \frac{\zeta\,dx}{Q} = 0$. A cette équation j'ajoute l'équation $du + tQ\,dx = 0$, j'aurai (A) $du + dt + (tQ + \frac{t\,dQ}{Q\,dx} + \zeta t - \frac{uX}{Q}) \times dx - \frac{\zeta\,dx}{Q} = 0$. Or cette équation seroit intégrable, si elle se pouvoit ramener à la forme suivante $du + dt + (u+t).P\,dx - \frac{\zeta\,dx}{Q} = 0$, P & Q étant des fonctions connues de x. Car en faisant $u + t = r$, $du + dt = dr$, on auroit $dr + rP\,dx - \frac{\zeta\,dx}{Q} = 0$; équation réduite à la formule du Chapitre VII. & qui nous donne $r = Gc^{-\int P\,dx} + c^{-\int P\,dx} \int \frac{\zeta}{Q} c^{\int P\,dx}\,dx$. Donc (B) $u = Gc^{-\int P\,dx} + c^{-\int P\,dx} \int \frac{\zeta}{Q} c^{\int P\,dx}\,dx - t$; $du = -Gc^{-\int P\,dx} P\,dx - c^{-\int P\,dx} P\,dx \int \frac{\zeta}{Q} c^{\int P\,dx}\,dx + \frac{\zeta}{Q}\,dx - dt$. Substituant cette valeur dans $du + tQ\,dx = 0$, on aura une équation réductible encore au cas du Chapitre VII. & qui nous donnera la valeur de t en x. Donc en mettant dans (B) pour t cette valeur, on aura celle de u en x. Donc, dans l'hypothese précédente, l'équation $ddu + \zeta\,du\,dx + uX\,dx^2 + \zeta\,dx^2 = 0$ sera intégrée.

Or pour que l'équation (A) se puisse ramener à la suivante $dt + du + (u+t).P\,dx - \frac{\zeta\,dx}{Q} = 0$, il faut que $tQ + \frac{t\,dQ}{Q\,dx} + \zeta t - \frac{uX}{Q} = (u+t).P$; ce qui arrivera, si $-\frac{X}{Q} = \zeta + Q + \frac{dQ}{Q\,dx}$. Car alors on aura $du + dt + \left\{(\zeta + Q + \frac{dQ}{Q\,dx}) \times t + (\zeta + Q + \frac{dQ}{Q\,dx})\,u\right\} \times dx - \frac{\zeta\,dx}{Q} = 0$; & en supposant $\zeta + Q + \frac{dQ}{Q\,dx} = P$, on

aura $du+dt+(u+t).P-\frac{\zeta dx}{Q}=0$. Mais de l'équation $\xi+Q+\frac{dQ}{Q\,dx}=-\frac{X}{Q}$ on tire $Xdx+\xi Qdx+QQdx+dQ=0$; donc toutes les fois que cette derniere équation ſera intégrable, $ddu+\xi du\,dx+uXdx^2+\zeta dx^2=0$ le ſera auſſi.

CCXCVI.

Prenons maintenant l'équation $ddu+\xi dudx+uXdx^2=0$, & cherchons l'équation de condition d'après laquelle elle ſeroit intégrable. Je ſuppoſe ſuivant la méthode de M. Euler, expoſée dans le Chapitre V. de cette ſeconde Section, $u=c^{\int y\,dx}$, dx étant toujours conſtant, on aura $du=c^{\int y\,dx}ydx$; $ddu=c^{\int y\,dx}dydx+c^{\int y\,dx}y^2dx^2$. Donc après les ſubſtitutions & réductions on aura la transformée ſuivante $Xdx+y\xi dx+yydx+dy=0$. Donc ſi cette équation eſt intégrable, l'équation $ddu+\xi du\,dx+uXdx^2=0$ le ſera auſſi; réciproquement ſi cette derniere équation eſt intégrable, la premiere le ſera, c'eſt-à-dire, qu'on aura la valeur de y en x. Car puiſqu'on a par l'hypotheſe la valeur de u en x & que $y=\frac{du}{u\,dx}$, on aura donc la valeur de y dans l'équation $Xdx+\xi ydx+yydx+dy=0$. Or cette équation eſt, comme on le voit, la même abſolument que la réduite $Xdx+Q\xi dx+QQdx+dQ=0$. Donc l'équation $ddu+\xi du\,dx+uXdx^2+\zeta dx^2=0$ eſt intégrable dans les mêmes cas que la ſuivante $ddu+\xi du\,dx+uXdx^2=0$ laquelle a un terme de moins. *C. Q. F. D.*

Cherchons maintenant quelques cas particuliers d'intégration des équations précédentes.

CCXCVII.

Recherche de quelques cas d'intégration de la formule qui ſert d'exemple.

THEOREME. Si dans l'équation $ddu + \xi du dx + u X dx^2 + \zeta dx^2 = 0$, ξ contient un terme de cette forme $\frac{A}{x}$, il ſera toujours poſſible de faire évanouir ce terme, excepté dans le cas où $A = 1$.

En effet, diviſant l'équation par dx, elle devient $\frac{ddu}{dx} + \frac{A du}{x} + u X dx + \zeta dx = 0$, que l'on peut (Art. CCIII.) mettre ſous la forme ſuivante $d\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{A du}{x} + \&c. = 0$. Or dans cette équation il n'y a plus aucune différentielle conſtante, puiſque $\frac{du}{dx}$ eſt une quantité finie; je ſuppoſe dx variable, & j'aurai $\frac{ddu}{dx} - \frac{du ddx}{dx^2} + \frac{A du}{x} + u X dx + \zeta dx = 0$; ou $ddu - \frac{du ddx}{dx} + \frac{A du dx}{x} + u X dx^2 + \zeta dx^2 = 0$.

Soit maintenant $x = fz^k$ & dz conſtant, la transformée ſera $ddu - \frac{(k-1).dz du}{z} + \frac{A k dz du}{z} + \&c. = 0$, ou $ddu - \frac{k dz du}{z} + \frac{dz du}{z} + \frac{A k dz du}{z} + \&c. = 0$. Suppoſons $k = \frac{-1}{A-1}$, on aura $ddu + \frac{dz du}{(A-1).z} + \frac{dz du}{z} - \frac{A dz du}{(A-1).z} + \&c. = 0$; ou enfin $ddu + \frac{dz du}{(A-1).z} + + \frac{A dz du}{(A-1).z} - \frac{dz du}{(A-1).z} - \frac{A dz du}{(A-1).z} + \&c. = 0$. Donc il eſt évident que toutes les fois que A ne ſera pas $= 1$. la ſubſtitution de $x = fz^{\frac{1}{A-1}}$ fera évanouir le ſecond terme de l'équation qui deviendra pour lors $ddu + B u \varphi(z) dz^2$.

$+ C\Gamma(z)\,dz^2 = 0$, $\varphi(z)$ & $\Gamma(z)$ étant des fonctions différentes de z.

Donc en général ſi on a $ddu + \frac{A\,du\,dx}{x} + uBx^m dx^2 + \zeta dx^2 = 0$, cette différentielle ſe réduit à l'équation $ddu + uRz^p dz^2 + \zeta' dz^2 = 0$.

Soit $du + tQdz = 0$; en mettant pour ddu ſa valeur, diviſant l'équation par Qdz & changeant les ſignes, on aura la transformée ſuivante $dt + \frac{t\,dQ\,dz}{Q\,dz} - \frac{uRz^p\,dz}{Q} - \zeta' dz = 0$. A cette équation j'ajoute celle-ci $du + tQdz = 0$; ce qui me donne $du + dt + \left(tQ + \frac{t\,dQ}{Q\,dz} - \frac{uRz^p}{Q}\right) \times dz - \zeta' dz = 0$, équation intégrable dans le cas où $tQ + \frac{t\,dQ}{Q\,dz} - \frac{uRz^p}{Q} = (u+t) \times P$. Cette propoſition ſe démontreroit de la même façon dont nous l'avons démontrée Article CCXCV.

Or pour que $tQ + \frac{t\,dQ}{Q\,dz} - \frac{uRz^p}{Q} = (u+t) \times P$, il faut que $-\frac{Rz^p}{Q} = Q + \frac{dQ}{Q\,dz}$. Donc l'équation $ddu + uRz^p dz^2 + \zeta' dz^2 = 0$ s'integrera dans les mêmes cas que l'équation $Rz^p dz + QQdz + dQ = 0$, qui eſt l'équation de Ricati. Nous avons donné les cas d'intégration de cette formule aux Articles CXVIII. & ſuivants de cette ſeconde Partie.

CCXCVIII.

THEOREME 2. Si $A = 1$, l'équation ſera $ddu + \frac{du\,dx}{x} + uBx^m dx^2 + \zeta dx^2 = 0$; en faiſant toujours $du + tQdx = 0$ & ſuivant les mêmes procédés que dans les Articles précédents,

précédents, l'intégration ſe réduira à celle de $Bx^m dx + Qx^{-1} dx + QQdx + dQ = 0$. Soit dans cette équation $Q = rx^{-1}$, la transformée ſera $Bx^m dx + \frac{r^2 dx}{xx} + \frac{dr}{x} = 0$; intégrable dans le cas où $m = -2$, puiſqu'elle devient alors $Bdx + xdr + rrdx = 0$. On trouvera les autres cas d'intégration de l'équation $Bx^m dx + Qx^{-1} dx + QQdx + dQ = 0$, en ſe ſervant des méthodes employées dans le Chapitre XI. de la premiere Section de cette ſeconde Partie.

CCXCIX.

THEOREME 3. Reprenons l'équation de condition de l'Art. CCXCVI. $Xdx + \xi Qdx + QQdx + dQ = 0$; & faiſons dans cette équation $X = Ax^m$ & $\xi = Bx^n$, elle devient $Ax^m dx + BQx^n dx + QQdx + dQ = 0$, la même que celle dont nous avons trouvé les cas d'intégrabilité dans le Chapitre XI. de la premiere Section. Soit donc comme dans l'Article CXXVI. $Q = Bx^r + fx^s z^t$, p, r, f, s, t étant des indéterminées priſes à volonté, on aura la transformée ſuivante $Ax^m dx + Bpx^{n+r} dx + Bfz^t x^{n+s} dx + ppx^{2r} dx + 2fpz^t x^{s+r} dx + ffz^{2t} x^{2s} dx + prx^{r-1} dx + fsz^t x^{s-1} dx + ftx^s z^{t-1} dz = 0$; intégrable dans tous les cas où elle ſe peut réduire à une équation de cette forme $X' z^{t-1} dz + z^t X'' dx + z^{2t} X''' dx = 0$, X', X'', X''' étant des fonctions ou des puiſſances de x, puiſqu'alors c'eſt le cas de M. Bernoulli, traité dans les Articles XCV. & ſuivants. La trans-

formée ſera encore intégrable, toutes les fois qu'elle tombera dans les cas intégrables de l'équation de Ricati.

CCC.

REMARQUE. En faiſant $X = Ax^m + x^{-1}$, l'équation de condition ſera $Ax^m dx + x^{-1} dx + BQx^n dx + QQdx + dQ = 0$; dont la transformée ne ſera pas, comme il eſt aiſé de le voir, plus compliquée que celle du Théorême précédent. On en trouvera par la même méthode les cas d'intégrabilité.

CCCI.

THEOREME 4. Soit dans l'équation de condition $\zeta = 0$ & $X = Ax^m + Bx^n$, elle devient $Ax^m dx + Bx^n dx + QQdx + dQ = 0$, dont on trouvera encore les cas d'intégrabilité en faiſant $Q = px^r + fx^s z^t$.

CCCII.

Autre formule à laquelle s'applique notre méthode.

COROLLAIRE GÉNÉRAL. Dans le Chapitre IX. de cette préſente Section, nous avons vu comment on pouvoit dans certains cas intégrer l'équation différentielle $(a + bx^n) \times x^2 dd_r + (c + fx^n) . xdxd_r + (g + hx^n) \times rxdx^2 = 0$. Il s'enſuit du Théorême premier de ce Chapitre, qu'on pourra dans les mêmes cas intégrer cette équation augmentée d'un terme ζdx, ζ étant une fonction quelconque de x.

CCCIII.

SCHOLIE. Reprenons l'équation $ddu + \zeta dudx + uXdx^2 + \zeta dx^2 = 0$, & au lieu de ſuppoſer $du + tQdx = 0$, ſuppoſons $du - EtQdx = 0$, E étant un coefficient indéterminé ; nous aurons la transformée ſuivante $EQdtdx + Etd Qdx + EtQ\zeta dx^2 + uXdx^2 + \zeta dx^2 = 0$. Multipliant cette ſeconde équation par un coefficient indéterminé ν, & la diviſant par $EQdx$, on aura $\nu dt + \frac{\nu t dQ dx}{Q dx} + \nu t\zeta dx + \frac{\nu u X dx}{EQ} + \frac{\nu \zeta dx}{EQ} = 0$. J'ajoute à cette équation la ſuivante $du - EtQdx = 0$, & je les diviſe par ν, j'aurai $\frac{du}{\nu} + dt + \left\{ \frac{t dQ}{Q dx} - \frac{EtQ}{\nu} + \zeta t + \frac{\nu u X}{E\nu Q} \right\} . dx + \frac{\zeta dx}{EQ} = 0$; équation intégrable (Art. CCXCV.), ſi $\frac{t dQ}{Q dx} - \frac{EtQ}{\nu} + \zeta t + \frac{\nu u X}{E\nu Q} = \left(\frac{u}{\nu} + t\right) \times P'$. Or il faut pour cela que $\frac{\nu X}{EQ} = \frac{dQ}{Q dx} - \frac{EQ}{\nu} + \zeta$; ce qui donne pour nouvelle équation de condition (D) $Xdx - \frac{EQ\zeta dx}{\nu} + \frac{E^2 Q^2 dx}{\nu^2} - \frac{EdQ}{\nu} = 0$. Mais il eſt viſible que cette nouvelle ſuppoſition ne rend pas la ſolution fondamentale plus générale, puiſque la nouvelle équation de condition (D) & la premiere $Xdx + Q\zeta dx + QQdx + dQ = 0$ reviennent à la même, en mettant dans l'équation (D) Q pour $-\frac{EQ}{\nu}$.

CCCIV.

COROLLAIRE. En général toute équation $X'dx + \zeta' u dx + X' u^2 dx + du = 0$ deviendra $Xdx + \zeta y dx +$

$yydx + dy = 0$ en faiſant $X''u = y$; puiſque cette ſuppoſition nous donne $u = \frac{y}{X''}$, $du = \frac{dy}{X''} - \frac{ydX''}{X''^2}$ & pour transformée $Xdx + \xi ydx + y^2 dx + dy = 0$, X étant $= X'X''$ & $\xi = \frac{\xi'}{X} - \frac{dX''}{X''^2 dx}$.

On peut même changer cette équation en celle-ci $\frac{X'dx}{r} + X''y^2 rdx + dy = 0$, qui dans certains cas pourroit être plus commode. Il faut pour cet effet ſuppoſer $u = yr$ & $\frac{dr}{r} + \xi dx = 0$. Car alors la transformée ſera $X'dx + yr\xi dx + y^2 r^2 X''dx + rdy + ydr = 0$. Diviſons par yr, elle devient $\frac{X'dx}{yr} + \xi dx + X''yrdx + \frac{dy}{y} + \frac{dr}{r} = 0$; & à cauſe de $\frac{dr}{r} + \xi dx = 0$, $\frac{Xdx}{yr} + X''yrdx + \frac{dy}{y} = 0$; ou enfin $\frac{X'dx}{r} + X''y^2 rdx + dy = 0$.

CCCV.

COROLLAIRE 2. Puiſque l'équation $ddu + \frac{dudx}{x} + uXdx^2 + \xi dx^2 = 0$ ſe réduit (Théorême 2.) à $Xdx + Qx^{-1}dx + QQdx + dQ = 0$, il s'enſuit qu'en faiſant $Q = \frac{y}{x}$, elle ſe réduira à $xXdx + \frac{y^2 dx}{x} + dy = 0$. En effet la transformée ſera $Xdx + yx^{-2}dx + y^2 x^{-2}dx + x^{-1}dy - yx^{-2}dx = 0$; c'eſt-à-dire $Xdx + y^2 x^{-2}dx + x^{-1}dy = 0$; & en multipliant par x, $xXdx + \frac{yydx}{x} + dy = 0$.

CCCVI.

On peut appliquer la méthode expliquée dans ce Chapitre à des équations d'un ordre plus élevé que le ſecond.

Application de la méthode à une équation différentielle du troisieme ordre.

Soit, par exemple, l'équation du troisieme ordre $d^3u + \xi\,ddu\,dx + X\,du\,dx^2 + u\zeta\,dx^3 + \chi\,dx^3 = 0$; ξ, X, ζ, χ étant des fonctions de x. En faisant $ddu + Q\,dt\,dx + tN\,dx^2 = 0$, Q, t, N étant trois indéterminées, on trouvera que la proposée est réductible à une équation du second degré de cette forme $ddz + R'dz\,dx - \frac{\chi\,dx^2}{Q} = 0$; si $N = X + QQ - \frac{dQ}{dx} - \xi Q$ & $\zeta + NQ - \frac{dN}{dx} - \xi N = 0$. Car suivant la supposition précédente la transformée sera, après les substitutions ordinaires, $-Q\,dx\,ddt - dQ\,dt\,dx - \xi Q\,dt\,dx^2 - N\,dt\,dx^2 + X\,du\,dx^2 - t\,dN\,dx^2 - \xi tN\,dx^3 + u\zeta\,dx^3 + \chi\,dx^3 = 0$. Divisant cette équation par $-Q\,dx$ & y ajoutant l'équation $ddu + Q\,dt\,dx + tN\,dx^2 = 0$, on aura $ddu + ddt + \left(\frac{dQ}{Q\,dx} - Q + \xi + \frac{N}{Q}\right) \times dt\,dx - \left(\frac{X}{Q}\right) \times du\,dx + \left(\frac{dN}{dx} + \xi N - NQ\right) \times \frac{t\,dx^2}{Q} - (\zeta)\,\frac{n\,dx^2}{Q} - \frac{\chi\,dx^2}{Q} = 0$. Donc si $(F)\ \frac{dQ}{Q\,dx} - Q + \xi + \frac{N}{Q} = -\frac{X}{Q}$, & que $\frac{dN}{dx} + \xi N - NQ - \zeta = 0$, on aura en supposant l'un & l'autre membre de l'équation $(F) = R'$, $ddu + ddt + (du + dt) \times R'dx - \frac{\chi\,dx^2}{Q} = 0$; & enfin en faisant $du + dt = dz$, on trouve $ddz + R'dx\,dz - \frac{\chi\,dx^2}{Q} = 0$.

Or en substituant dans l'équation $\frac{dN}{dx} + \xi N - NQ - \zeta = 0$ pour N sa valeur tirée de l'équation (F) qui devient $N = X + QQ - \frac{dQ}{dx} - \xi Q$, on trouvera une équation différentielle du second degré dont Q sera l'inconnue qu'il faudra déterminer en x. Donc l'intégration

de l'équation $d^3u + \frac{1}{2}ddu\,dx + X\,du\,dx^2 + u\zeta\,dx^3 + x\,dx^3 = 0$, ſe réduit à celle d'une équation différentielle du ſecond ordre.

FIN.

TABLE
DES MATIERES
Contenues dans cette Seconde Partie.

AVANT-PROPOS, Page iij
Supplément à la Premiere Partie, vij

Diviſion générale de cette Seconde Partie, Page 1
Obſervation ſur l'addition de la conſtante à l'intégrale trouvée, 2

SECTION PREMIERE.

De l'Intégration des Différentielles du premier ordre qui contiennent deux ou pluſieurs variables.

CHAPITRE PREMIER.

Des quantités & des équations différentielles qui s'intégrent ſans qu'il ſoit néceſſaire d'en ſéparer auparavant les indéterminées & ſans aucune autre préparation.

§. I. *Sur l'intégration des quantités différentielles.*

I. 1°. Lorſqu'elles ſont des quantités entieres, 3
II. 2°. Lorſqu'elles ſont fractionnaires, *ibid.*
IV. 3°. Lorſqu'elles contiennent des binomes, trinomes, &c. élevés à différentes puiſſances, 4
VII. 4°. Lorſque ces quantités renferment des Logarithmes, 5

§. II. *Sur l'intégration des équations différentielles.*

VIII. Ce que c'eſt qu'une équation différentielle d'un ordre quelconque, 6
IX. Ce que c'eſt que la méthode inverſe des tangentes, 7
X. Lemme préparatoire, *ibid.*
XI. Exemples, 8

CHAPITRE II.

Méthode pour reconnoître quand une différentielle compoſée de pluſieurs variables eſt la différentielle exacte de quelque quantité, & pour l'intégrer dans ce cas.

Solution d'un Problême néceſſaire pour ce qui ſuit, 10
XV. Solution de ce Problême ſur un exemple, *ibid.*
XVI. Solution générale du Problême, 12

§. I. *Expoſition de la Méthode appliquée aux quantités & aux équations différentielles qui ne renferment que deux variables.*

XVII. Théorême fondamental, *ibid.*
XVIII. Autre maniere de préſenter le Théorême précédent, 14
XX. Son application à quelques différentielles, 15
Premier exemple, *ibid.*
XXI. Second exemple, 16
XXIII. Application du Théorême aux équations différentielles à deux variables, *ibid.*

Maniere d'intégrer les quantités $Adx + Bdy$ *& les équations* $Adx + Bdy = o$, *lorſqu'elles ſont des différentielles exactes.*

XXIV. Appliquée 1°. aux différentielles $Adx + Bdy$, 17
XXV. Exemple particulier, *ibid.*
XXVI. 2°. Application de cette méthode aux équations $Adx + Bdy = o$, 18

§. II. *Application du Théorême fondamental aux équations différentielles qui renferment plus de deux variables.*

XXVIII. Moyen de s'aſſurer ſi les équations repréſentées par $Adx + Bdy + Cdz = o$ ſont intégrables, 19
XXIX. Exemple, 21
XXX. Intégration des équations completes à trois variables, 22

XXXI.

XXXI. Application à un exemple particulier, 23
XXXII. Second exemple, *ibid.*
XXXIII. Quand une équation différentielle à trois variables n'eſt pas complete, on peut quelquefois la rendre telle, en la multipliant par un facteur commun à tous ſes termes, 25
Il y a une infinité d'équations différentielles à trois variables qui n'ont point d'intégrales, *ibid.*
XXXIV. Premiere démonſtration, 26
XXXV. Leur différence en cela des équations à deux variables, 27
XXXVI. Qui expriment toujours une courbe dont la conſtruction eſt poſſible, *ibid.*
XXXVII. Seconde démonſtration que pluſieurs équations différentielles à trois variables ne peuvent avoir aucune conſtruction, 28
Cette démonſtration ſe fait par les ſurfaces courbes, *ibid.*
XL. Maniere de trouver le facteur qui peut rendre complete une équation différentielle à trois variables, lorſqu'elle eſt ſuſceptible d'intégration ou de conſtruction, 31
XLI. Application du Théorême aux différentielles qui ont 4, 5, &c. variables, 33
XLII. Procédé pour les équations à 4, 5, &c. variables, 34
Méthode pour s'aſſurer ſi elles peuvent devenir completes, lorſqu'elles ne le ſont pas, *ibid.*
Nombre d'équations à vérifier, *ibid.*
XLIII. Ce nombre peut quelquefois ſe diminuer. Preuve ſur une équation à quatre variables, 35

CHAPITRE III.

De la conſtruction des équations différentielles dans leſquelles les indéterminées ſont ſéparées.

XLVII. Ce qu'il faut faire avant que de conſtruire l'équation, 38
XLVIII. Procédé pour faire la conſtruction, *ibid.*

CHAPITRE IV.

De la ſéparation des indéterminées dans les équations différentielles par les regles ordinaires de l'Algebre, ou par de ſimples transformations.

LII. Exemple de cette ſéparation par les regles ordinaires de l'Algebre, 41
Premier exemple, *ibid.*
LIII. Second exemple, 42
LIV. Troiſieme exemple, *ibid.*
LV. Exemples de cette même ſéparation par des transformations, *ibid.*
LXII. Cas plus généraux que les précédents qui s'intégrent de même.
Premiere formule, 46

LXIII. Application à un exemple, 46
LXIV. Seconde formule plus générale, 47
LXV. Application à un exemple, 48

CHAPITRE V.

De la ſéparation des indéterminées dans les équations homogenes.

LXVI. Ce que c'eſt qu'une équation *homogene*, 49
LXVII. Solution générale du Problême, *ibid.*
LXVIII. Application à un exemple, 50
LXIX. Cette regle s'étend à toutes les équations homogenes, à quelque puiſſance qu'y ſoient élevées les dx & les dy, *ibid.*
LXXII. Elle s'étend auſſi aux équations homogenes qui contiennent plus de deux variables, en y faiſant toutefois quelque changement, 52
LXXIII. Exemple général, *ibid.*
LXXIV. Exemple particulier, 53

CHAPITRE VI.

Méthode pour rendre homogenes des équations qui ne le ſont pas.

LXXVI. Elles ſont au nombre de deux, 54
LXXVII. Exemples de la premiere méthode. Premier exemple, *ibid.*
LXXIX. Second exemple, 55
LXXX. Troiſieme exemple, *ibid.*
LXXXII. Expoſition de la ſeconde méthode. Premiere formule pour les équations à trois termes, 56
LXXXV. Application de la formule à une équation particuliere, 58
LXXXVI. Seconde formule contenant les équations à quatre termes, *ibid.*
LXXXVII. Application de la formule à quelques équations particulieres. Premiere équation, 60
XC. Cas particulier aſſez étendu qui ſe ramene à l'homogénéité. Ce cas eſt repréſenté par l'équation $(ax + by + c).dx + (gx + fy + h).dy = 0$, 62
XCI. Obſervations importantes ſur l'équation précédente, 63

CHAPITRE VII.

Sur la conſtruction de l'équation $AXy^n dy + By^{n+1} X'dx + Cy^q X''dx = 0.$

XCV. Procédé de la méthode, 66
XCVI. Obſervations ſur la méthode précédente, 68
XCVIII. Quelle eſt la généralité de la formule précédente, 69

CHAPITRE VIII.

Des Différentielles qui peuvent ſe ramener par des transformations à la formule du Chapitre précédent.

CI. Premiere formule de ces différentielles, 71
CII. Application à quelques exemples particuliers, 72
CIII. Seconde formule, *ibid.*
CIV. Application à un exemple, 74
CV. Troiſieme formule qui comprend les deux précédentes, *ibid.*
CVI. Application de cette formule à un exemple, 76
CVII. Quatrieme formule, *ibid.*
CVIII. Application à un exemple, 77
CIX. Formule précédente généraliſée, *ibid.*
CX. Application de la formule à un exemple, 79
CXII. Cinquieme formule, 80
CXIV. Son application à un exemple, 81

CHAPITRE IX.

Examen général de tous les cas particuliers d'intégration des équations à trois termes.

CXVI. Formule des équations à trois termes. . . . . Comparée avec celle du Chapitre VI. 82
CXVIII. Méthode pour trouver les cas dans leſquels on integre l'équation de Ricati, 84
CXXI. Méthode pour trouver l'équation algébrique qui répond à cette équation $ax^m dx + by^2 x^n dx = dy$, dans la ſuppoſition de $n = 0$. 87

CHAPITRE X.

Recherche générale de l'intégration des équations à quatre termes.

CXXII. Ces équations ſont toutes compriſes dans deux formules, 89
Premiere maniere de chercher les cas d'intégration de ces formules ; en examinant ceux dans leſquels elles peuvent devenir homogenes, *ibid.*
CXXIII. Nouvelle méthode pour chercher les cas d'intégration des équations à quatre termes. . . Appliquée à la premiere formule, 90
CXXIV. Application de cette même méthode à la ſeconde formule, 93

CHAPITRE XI.

Examen des cas d'intégration de l'équation $x^m dx + ady + byx^n dx + cy^s dx = o$.

CXXVI. Transformation néceſſaire dans le cas préſent.... Equation transformée, 94
CXXVII. Premiere ſuppoſition pour cette équation, *ibid.*
Nous fournit trois Théorêmes, 95
CXXIX. Seconde ſuppoſition qui donne auſſi trois Théorêmes, 97
CXXX. Troiſieme ſuppoſition... Fournit trois nouveaux Théorêmes, 100
CXXXI. Autre transformation dont on peut encore ſe ſervir, 101
Equation transformée, 102
CXXXII. Premiere ſuppoſition pour cette équation.... Nous donne un Théorême, *ibid.*
CXXXIII. Seconde ſuppoſition qui donne auſſi un Théorême, *ibid.*
CXXXIV. Dernier cas d'intégration de la formule, 103
CXXXVI. Recherche des cas d'intégrabilité de deux nouvelles équations à quatre termes, 104
CXXXVII. Examen de la premiere, *ibid.*
CXXXVIII. Examen de la ſeconde équation, 106

CHAPITRE XII.

Méthode pour conſtruire les équations différentielles à deux variables, dans leſquelles l'une des deux indéterminées manque.

CXL. Procédé de la méthode.... Quelle eſt la ſubſtitution qu'elle emploie, 108
Application de la méthode à quelques exemples, 109

CHAPITRE XIII.

Méthode pour intégrer pluſieurs équations différentielles dans leſquelles dx *&* dy *ſont élevées à différentes puiſſances.*

CXLVI. Conditions qu'exige cette méthode, 112
Formule des équations auxquelles on la peut appliquer.... Procédé de la méthode appliquée à cette formule, *ibid.*
CXLVII. Le cas des équations homogenes ſe réſout par cette méthode, 113
CXLVIII. Autre maniere plus générale de réſoudre le cas des équations homogenes, *ibid.*

CXLIX. Auſſi bien que l'équation du Chapitre VI. Art. xc. 114
CL. Application à une ſeconde formule, *ibid.*
Cas d'intégration de cette formule, 115
CLI. Maniere de les trouver, *ibid.*
CLII. Premier cas d'intégration, 116
CLIII. Second cas d'intégration de la même formule, *ibid.*
CLIV. Troiſieme cas d'intégration, 117
CLV. Celui des équations homogenes y eſt compris, 118
CLVII. Quatrieme & dernier cas d'intégration de la même formule, 119
CLIX. Recherche des cas d'intégration d'une troiſieme formule, *ibid.*

CHAPITRE XIV.

Autre méthode pour découvrir quelques équations intégrables par le moyen de l'équation $z = \frac{dx}{dy}$.

CLXIII. Procédé de cette méthode, 122
CLXIV. Application de cette méthode, 123
CLXVII. Premier exemple, 124
CLXVIII. Second exemple, 125

CHAPITRE XV.

Méthode pour intégrer quelques équations différentielles par le moyen des coefficients indéterminés.

CLXXI. Cas dans leſquels on peut ſe ſervir de cette méthode, 127
CLXXII. En quoi elle conſiſte, 128
CLXXIII. Lemme préparatoire, *ibid.*
CLXXV. Application de la méthode aux cas où l'on a deux équations, 129
CLXXVI. Obſervations néceſſaires ſur la ſolution précédente, 132
CLXXIX. Cas dans lequel on peut réſoudre autrement le Problême, 134
CLXXXI. Application de la méthode aux cas où l'on a trois équations, 136
CLXXXIII. Ce qu'il faut faire ſi on avoit quatre équations, 138

CHAPITRE XVI.

Méthode pour déterminer une intégrale par certaines conditions données de la différentielle.

CLXXXIV. Premier exemple, 139
CLXXXV. Second exemple, 140
CLXXXVI. Troiſieme exemple plus compliqué que les deux précédents, 141
CLXXXVIII. Quatrieme exemple qui renferme les trois autres, 143
CLXXXIX. Examen de quelques cas particuliers, 146

SECTION SECONDE.

De l'Intégration des différentielles à pluſieurs variables du ſecond ordre, ou d'un ordre plus élevé.

CXCII. Notions préliminaires, 151

CHAPITRE PREMIER.

De l'intégration de certaines différentielles du ſecond ordre; dans le cas où l'on ſait que telle ou telle différentielle du premier ordre a été traitée comme conſtante dans le paſſage des premieres différences aux ſecondes.

CXCVI. Premier exemple, 153
CXCVII. Second exemple, 154
CXCVIII. Troiſieme exemple, *ibid.*
CC. Quatrieme exemple, 155

CHAPITRE II.

Méthode pour rendre completes les équations différentielles de tous les degrés.

CCII. Expoſition de cette méthode appliquée à des différentielles du ſecond ordre, 156
CCIII. Autre maniere de réſoudre ce Problême, 157
CCIV. Application de la méthode aux différentielles du troiſieme ordre, 158
CCVI. En quoi conſiſte l'utilité de cette méthode, 159
CCVII. Son application à pluſieurs exemples, *ibid.*

CHAPITRE III.

Méthode pour déterminer dans quelques cas, la différentielle qui, ſuppoſée conſtante, facilitera le plus l'intégration.

CCXII. Son application à quelques exemples, 161

CHAPITRE IV.

Dans lequel on applique aux équations différentielles de tous les ordres la méthode de l'article qui apprend à intégrer ou conſtruire les équations différentielles du premier degré dans leſquelles l'une des indéterminées finies ne ſe trouve à aucun terme.

CCXVI. Conditions que cette méthode exige, 164
CCXVII. Son application à pluſieurs équations du ſecond ordre.....
Premier exemple, 165
CCXVIII. Second exemple, *ibid.*
CCXIX. Autre maniere d'intégrer les équations précédentes, 166
CCXX. Appliquée à l'exemple précédent, *ibid.*
CCXXI. Troiſieme exemple, 167
CCXXII. Application de la méthode à des équations d'un ordre plus élevé que le ſecond, 168
CCXXIII. 1°. A une équation du troiſieme ordre, 169
CCXXIV. 2°. A une équation du quatrieme, *ibid.*
CCXXV. Cas particuliers qui ſe ramenent aux précédents par le choix de la conſtante, 170
CCXXVI. Autres cas particuliers qui s'y ramenent par de ſimples ſubſtitutions, 171

CHAPITRE V.

Méthode pour transformer un grand nombre d'équations différentielles qui renferment leurs deux indéterminées finies, en d'autres dans leſquelles l'une des deux ne ſe trouve pas.

CCXXVIII. Fondements de cette méthode, 172

CCXXIX. Trois cas généraux auxquels elle s'applique, 173
CCXXX. Examen du premier cas de la méthode, 174
CCXXXIII. Application de la formule à deux exemples particuliers, 177
CCXXXV. Seconde partie de la méthode, 178
CCXXXVI. Application à un exemple, 179
CCXXXVII. Autre exemple dans lequel l'équation a plus de trois termes, 180
CCXXXVIII. Troiſieme partie de la méthode comprend deux cas, 182
CCXXXIX. Premier cas repréſenté par la formule $Px^m dy^{m+n} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m+n-n} = dx^m ddy$. *ibid.*
CCXL. Application de la formule à un exemple, 183
CCXLI. Second cas repréſenté par la formule $Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m-n+1} = dx^{m-1} ddx$, 184
CCXLII. Application de cette formule à un exemple, 185

CHAPITRE VI.

Application de la Méthode du Chapitre XV. de la premiere Section aux équations différentielles d'un ordre plus élevé que le premier.

CCXLIV. Conditions que cette méthode exige, 186
CCXLV. Procédé de la méthode, 187
CCXLVI. Son application à des exemples, *ibid.*

CHAPITRE VII.

Expoſition d'une Méthode pour conſtruire ces mêmes équations $\frac{a d^n y}{dx^n} + \frac{b d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{g d^{n-2} y}{dx^{n-2}}$, *&c.* $+ X = 0$, *en y ſuppoſant* $X = 0$.

CCXLIX. Procédé de cette méthode, 191
CCL. Examen des différents cas qui peuvent arriver, 192
CCLV. Application de la méthode à une équation différentielle du ſecond ordre, 195
CCLVI. Son application à une équation du troiſieme ordre, 196
CCLVII. A une équation d'un ordre n quelconque, *ibid.*

CHAPITRE VIII.

Comparaiſon de la Méthode expoſée dans le Chapitre précédent avec celle que nous avons donnée dans le Chapitre VI. Sect. II.

CCLVIII. Démonſtration de la méthode précédente, 197
CCLIX. Examen des cas différents d'après la méthode du Chap. VI. 199
CCLXIII. Application à un exemple du cinquieme ordre, 202
CCLXV. Application de la méthode du Chapitre VII. Sect. II. à une formule plus générale que celle qu'on y a traitée, 203
CCLXVI. Application de la formule à une équation différentielle du ſecond ordre, 204
CCLXVII. Autres équations traitées par la méthode du Chap. VII. Sect. II. 206

CHAPITRE IX.

Méthode pour trouver les cas d'intégrabilité de quelques équations du ſecond ordre, repréſentées par la formule $(M)(a+bx^n)x^2 ddv+(c+fx^n)xdxdv+(g+hx^n)vdx^2=0$, *dans laquelle* dx *eſt conſtant.*

CCLXX. Quel eſt l'auteur de cette méthode, 210
Solution d'un Problème néceſſaire pour la ſuite, *ibid.*
CCLXXII. En quoi conſiſte la méthode, 212
On y peut faire uſage de deux ſeries différentes, *ibid.*
CCLXXIII. Premiere ſerie, 213
Equations de condition ſuivant leſquelles la premiere ſerie ſera terminée & la formule (*M*) intégrable, 215
CCLXXV. Seconde ſerie, *ibid.*
Cas dans leſquels cette ſeconde ſerie ſera terminée & la formule (*M*) intégrable, 217
CCLXXVI. Réunion de tous les cas d'intégrabilité précédents, *ibid.*
CCLXXVIII. Réduction de la formule (*M*) en une équation différentielle du premier ordre, 218
Cas dans leſquels la réduite (*V*) eſt intégrable, 219
CCLXXIX. Transformations de l'équation (*V*) en d'autres de trois termes, *ibid.*

CCLXXX. Premiere transformation, *ibid.*
Equation transformée qui n'a plus que trois termes, 221
CCLXXXI. Equations particulieres de trois termes qu'on peut tirer de cette équation, 222
Premiere équation particuliere... Dans quels cas elle eſt intégrable, *ibid.*
CCLXXXII. Seconde équation particuliere.... Dans quels cas intégrable, 223
CCLXXXIII. Troiſieme équation particuliere.... Dans quels cas intégrable, 224
Quatrieme équation particuliere.... Dans quels cas elle eſt intégrable, 226
CCLXXXV. Seconde transformation pour l'équation (▽), 227
Equation transformée (*H*).... Dans quels cas elle eſt intégrable, 229
CCLXXXVI. Equations particulieres qu'on peut tirer de la transformée (*H*).... Premiere équation particuliere, *ibid.*
Quels ſont ſes cas d'intégrabilité, 230
CCLXXXVII. Seconde équation particuliere.... Dans quels cas elle ſe peut intégrer, *ibid.*
CCLXXXVIII. Troiſieme équation particuliere.... Dans quels cas elle ſe peut intégrer, 231
CCLXXXIX. Quatrieme équation particuliere.... Ses cas d'intégrabilité, 232
CCXC. Cinquieme équation particuliere (φ).... Ses cas d'intégrabilité, *ibid.*
Autres équations particulieres intégrables qui viennent de l'équation (φ), *ibid.*
CCXCI. Sixieme équation particuliere (ξ).... Ses cas d'intégrabilité, 233
Autres équations intégrables qui viennent de l'équation (ξ), *ibid.*
CCXCII. Septieme équation particuliere, *ibid.*
Dans quels cas elle eſt intégrable, 234
CCXCIII. Huitieme équation particuliere intégrable, 235
CCXCIV. Application de la méthode précédente à une formule différentielle du ſecond ordre plus compliquée que la formule (*M*), *ibid.*

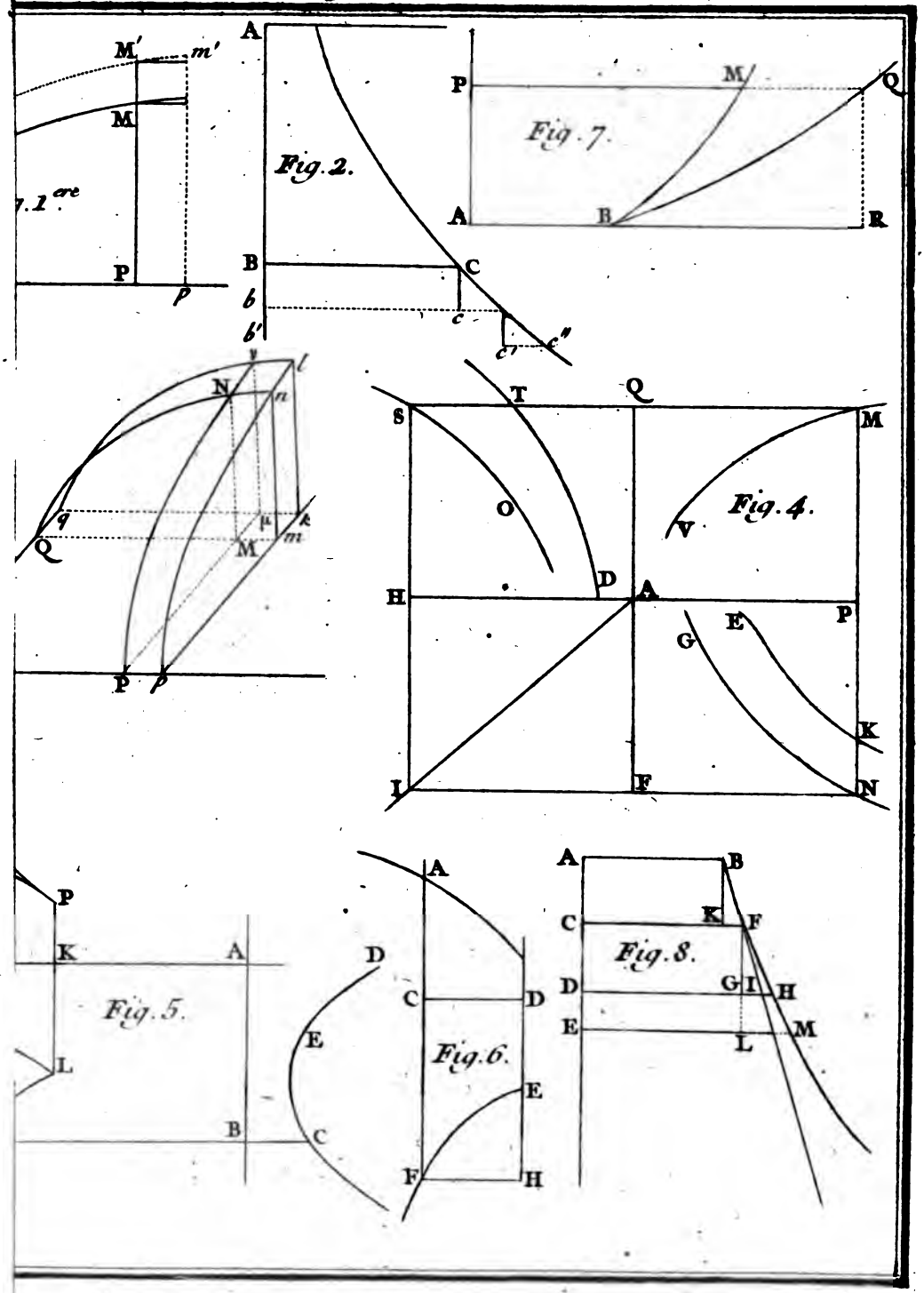
CHAPITRE X.

Examen de pluſieurs équations différentielles du ſecond ordre, intégrables dans les mêmes cas que d'autres équations du même ordre qui ont un terme de moins.

CCXCV. Application à une équation différentielle du ſecond ordre, 238

CCXCVII. Recherche de quelques cas d'intégration de la formule qui ſert d'exemple, 239
CCCII. Autre méthode à laquelle s'applique notre méthode, 242
CCCVI. Application de la méthode à une équation différentielle du troiſieme ordre, 245

Fin de la Table des Matieres.


M'
m'
M
P
p
A
B
b
b'
C
c
c'
c''
Fig. 2.
P
M
Q
A
B
R
Fig. 7.
N
n
l
q
Q
μ
k
M
m
P
p
T
Q
S
M
O
V
Fig. 4.
H
D
A
P
E
G
K
I
F
N
P
K
A
Fig. 5.
L
B
C
D
E
C
D
Fig. 6.
E
F
H
A
B
C
K
F
Fig. 8.
D
G
I
H
E
L
M

CATALOGUE

DES

LIVRES DE FONDS,

ET D'UNE PARTIE

DES LIVRES D'ASSORTIMENT,

QUI SE TROUVENT A LA LIBRAIRIE MATHÉMATIQUE

DE BACHELIER,

(SUCCESSEUR DE MADAME VEUVE COURCIER,)

Libraire du Bureau des Longitudes de France, de l'École royale polytechnique, éditeur du *Journal de physique, de chimie et d'histoire naturelle; des Annales de l'Industrie nationale et étrangère*, 1re. SÉRIE, et du *Recueil industriel*; Libraire pour les MATHEMATIQUES, LA PHYSIQUE, LES ARTS MÉCANIQUES, L'INDUSTRIE, LA MARINE, LES PONTS ET CHAUSSÉES, les Sciences et les Arts qui en dépendent.

QUAI DES AUGUSTINS, No. 55.

PARIS.

JUILLET 1827.

OUVRAGES PUBLIÉS PAR SOUSCRIPTION.

RECUEIL INDUSTRIEL, MANUFACTURIER, agricole et commercial; de la salubrité publique et des BEAUX-ARTS; Répertoire général des brevets d'invention; renfermant la description des expositions publiques faites en France et à l'étranger; par J.-G.-V. *De Moléon*, ancien élève de l'École polytechnique, membre du jury central de l'exposition de 1823, etc.

Le prix de la souscription, pour douze numéros, ou 4 vol., avec 48 planches, est, franc de port, de 30 fr. pour Paris, de 36 fr. pour les départemens, de 42 fr. pour les pays étrangers. On ne reçoit pas de souscription pour *moins de douze numéros*. Le premier numéro a paru en janvier 1827.

ANNALES DE L'INDUSTRIE NATIONALE ET ÉTRANGÈRE, ou MERCURE TECHNOLOGIQUE, recueil de Mémoires sur les Arts et Métiers, les Manufactures, le Commerce, l'Industrie, l'Agriculture, etc., renfermant la description du MUSÉE des produits de l'industrie française, exposés au Louvre en 1819. —*Dédiées* au Roi, par *L. Séb.* LENORMAND, Professeur de technologie et des Sciences Physico-Chimiques appliquées aux arts; et J.-G.-V. *de Moléon*, élève de l'École Polytechnique, membre de la Société d'Encouragement, etc., commencées en 1820 et terminées en 1826 inclusivement, 28 vol. in-8. 210 fr.

Chaque année, composée de 4 vol., se vend séparément. 30 fr.

ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES; Ouvrage périodique, rédigé par M. J.-D. GERGONNE, Professeur de Mathématiques transcendantes, à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Depuis le 1er. juillet 1810 ces Annales paraissent régulièrement de mois en mois par livraison de 32 pages in-4°. au moins, en sorte que les 12 Livraisons de chaque année forment un volume in-4°. de près de 400 pages, accompagné de toutes les planches nécessaires pour l'intelligence du texte.

Le prix de la Souscription annuelle, commençant au 1er. juillet de chaque année, est de 21 fr., franc de port pour la France, et de 24 fr. pour l'étranger.

Chaque volume se vend séparément 18 fr.

Cet Ouvrage renferme une grande quantité de Mémoires intéressans sur les Mathématiques et toutes les parties qui en dépendent.

ANNALES MARITIMES ET COLONIALES, contenant ce qui a paru depuis dix ans de plus intéressant sur la Marine et les Colonies, publiées avec l'approbation de S. Exc. le Ministre de la Marine et des Colonies et sous les auspices de S. A. R. l'Amiral de France, par M. BAJOT, Commissaire de Marine, Membre de la Légion-d'Honneur, Chef de bureau au Ministère. Prix : 25 fr.

Franc de port pour la France, 31 fr.

pour l'étranger, 37 fr.

Il paraît un cahier par mois.

Il reste encore quelques collections complètes de ce Journal, depuis 1816. Prix de chaque année, 25 fr.

Comme Journal, les Annales Maritimes et Coloniales rendent un compte exact de ce qui est publié en France et chez l'étranger; comme Recueil, elles renferment un grand nombre de Mémoires et de Voyages inédits du plus haut intérêt. La Marine et les Colonies ayant leur régime particulier, une partie de leurs Annales est spécialement consacrée à leur législation et à leur administration militaire, civile et judiciaire. Cette précieuse Collection est composée, aujourd'hui, de 26 vol. in-8., dont plusieurs de 1000 pages, grande justification, avec des planches gravées au Dépôt général de la Marine et d'autres lithographiées.

BULLETIN UNIVERSEL DES SCIENCES ET DE L'INDUSTRIE, dédié aux Savans de tous les pays et à la Librairie nationale et étrangère; publié sous la direction de M. le Baron DE FÉRUSSAC, Officier supérieur au Corps royal d'État-Major, Chevalier de Saint-Louis et de la Légion-d'Honneur, Membre de plusieurs Sociétés savantes nationales et étrangères.

Conditions de la Souscription. — Les abonnemens pour le Bulletin universel dans son ensemble, comme pour chacune de ses diverses sections, qu'on peut se procurer séparément, datent de janvier, pour douze volumes ou douze numéros paraissant le 1er de chaque mois. Le prix en est payé d'avance; les lettres de demande et l'argent sont adressés *franc de port*.

Les prix d'abonnement pour l'année 1827 seront, en conséquence, fixés conformément au tableau suivant des sections du Bulletin.

PRIX D'ABONNEMENT AU BULLETIN UNIVERSEL, etc.

	Paris.	Les dép., port franc.	L'étran., port fr.
	fr.	fr. c.	fr.
1. Sciences mathématiques, physiques et chimiques.	15	17 50	20
2. Sciences naturelles et géologie .	26	30 50	35
3. Sciences médicales, etc.	22	25 50	29
4. Sciences agricoles, écon., etc. .	15	17 50	20
5. Sciences technologiques	18	21 »	24
6. Sciences géograph., écon., publ., voyages.	22	25 50	29
7. Sciences hist., antiquités, philol.	18	21 »	24
8. Sciences militaires.	11	14 »	16
TOTAUX.	148	172,50	197
Prix des 7 premières sections prises ensemble	120	142 50	165
Prix du Bulletin complet	132	156 50	181

CORRESPONDANCE ASTRONOMIQUE, géographique, hydrographique et statistique, par M. le baron de ZACH.

Cet ouvrage paraît depuis le 1er. juillet 1818, régulièrement de mois en mois, par cahier de 6 à 7 feuilles d'impression.

Le prix de la souscription annuelle, ou de douze cahiers, est de 36 francs pour Paris. La collection se compose de 14 vol. in-8., du prix de chacun 18 fr.

ENCYCLOPÉDIE PORTATIVE, ou Résumé universel des Sciences, des Lettres et des Arts, par une Société de savans et de gens de lettres, sous la direction de MM. Bailly et de Moléon. Cet ouvrage formera deux séries, chacune composée de 100 volumes grand in-32, de 250 à 300 pages.

Le prix de chaque volume ou livraison est de 3 fr. 50 c.

Par la poste, 3 fr. 80 c.

Chaque volume se vend séparément.

La 1re. Série traitera des Sciences physiques, des Sciences rationnelles et des Sciences littéraires.

Les 18 premières Livraisons de cette première Série sont en vente.

La 2e Série traitera des Arts et Métiers, de l'Industrie en général et des Sciences appliquées à l'Industrie et aux Arts.

JOURNAL DE PHYSIQUE, DE CHIMIE, D'HISTOIRE NATURELLE ET DES ARTS, Ouvrage périodique qui paraît tous les mois par cahier de dix feuilles d'impression, avec des pl en taille-douce; ce qui forme 2 vol. par an, format in-4.; par feu J.-C. DELAMÉTHERIE, Professeur au Collége de France, et continué par M. H. DE BLAINVILLE, Docteur en Médecine de la Faculté de Paris, Professeur de Zoologie, d'Anatomie et de Physiologie comparées, à la Faculté des Sciences, suppléant de M. Cuvier au Jardin du Roi et au Collége de France, Membre et Secrétaire de la Société Philomathique, etc. *Ce journal a cessé de paraître.* Il se termine avec le t. 96.

On trouve à la même adresse des Collections complètes, des volumes et même des numéros séparés.

Le prix de chacun des volumes depuis le tome 50 jusqu'au tome 96 inclusivement est de 20 fr.; ceux antérieurs ne coûtent que 15 fr. Le prix de chaque numéro est de 4 fr.

EXTRAIT DU CATALOGUE

DE BACHELIER, SUCCESSEUR DE Mme. Ve. COURCIER,

Quai des Augustins, n°. 55, à Paris.

JUILLET 1827.

ALDINI. ESSAI THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTAL SUR LE GALVANISME, 2 vol. in-8. avec 10 planches. 10 fr.

ALLIX, Lieutenant-Général. THÉORIE DE L'UNIVERS, ou de la cause primitive du Mouvement et de ses principaux effets, 2e. édit., 1 vol. in-8., 1818. 5 fr.

* AMPÈRE, de l'Institut. PRÉCIS DES LEÇONS SUR LE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL, données à l'École royale polytechnique, in-4 (1re. partie.) 8 fr.

* — Mémoire sur quelques nouvelles propriétés des AXES PERMANENS de rotation des corps et des plans directeurs de ces axes, in-4., 1823. 4 fr.

* — Théorie des phénomènes électro-dynamiques, uniquement déduite de l'expérience, in-4, 1826, figures. 9 fr.

* — Précis de la théorie des phénomènes électro-dynamiques, in-8, 1824. 2 fr.

* — Description d'un appareil électro-dynamique, in-8., 1826. 1 f. 50 c.

* — Exposé méthodique des phénomènes électro-dynamiques et des lois de ces phénomènes, in-8., 1823. 1 f. 50 c.

* — Mémoire sur une nouvelle expérience électro-dynamique, in-8., 1825. 1 f. 50 c.

* — Précis d'un mémoire sur l'électro-dynamique in-8., 1825. 1 fr.

* — Considérations sur la théorie mathématique du jeu, in-4. 4 fr.

* ANALYSE DE LA LUMIÈRE déduite des lois de la mécanique, 1 fort vol. in-8. avec planches, 1826. 9 fr.

ANALYSE de l'origine de tous les cultes, ou religion de Dupuis, in-8. 3 fr.

* ANNALES DE L'INDUSTRIE nationale et étrangère de 1820 à 1826, formant 28 vol. in-8. 210 fr.

Chaque année se vend séparément 30 fr.

Voyez ci-contre *les Annales mensuelles de l'industrie.*

* ANNUAIRE présenté au Roi par le BUREAU DES LONGITUDES de France, in-18. (Cet ouvrage paraît tous les ans.) 1 fr.

ARAGO ET BIOT. RECUEIL D'OBSERVATIONS. (*Voyez* BIOT.) 21 fr.

ARITHMÉTIQUE (L') des campagnes, à l'usage des Écoles primaires, etc., ouvrage adopté par l'Université, in-12. 1 fr.

AVIS aux ouvriers en fer, sur la fabrication de l'acier, in-4., figures. 3 fr.

BABLOT. CALCUL DES PIEDS DE FER, suivant leur épaisseur et largeur, réduit au poids. *Nouv. édit.*, augm. du tarif du poids du VER ROND, à l'usage des serruriers, architectes-toiseurs, qui sont souvent chargés de faire des devis et marchés concernant la serrurerie, à la suite duquel on trouvera des tarifs à tant la livre et à tant le cent, etc., et de plusieurs tables. 1 vol. in-12., 1821. 2 fr. 50 c.

BABRON. PRÉCIS DES PRATIQUES DE L'ART NAVAL EN FRANCE, en Espagne et en Angleterre, etc., in-8., 1817. 6 f. 50 c

BAILLY. HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE ANCIENNE ET MODERNE, dans laquelle on a conservé littéralement le texte, en supprimant seulement les calculs abstraits, les notes hypothétiques, les digressions scientifiques, etc.; par V. C., 2 vol. in-8. 10 fr.

* BARRÉS DU MOLARD, *officier supérieur au corps royal d'artillerie.* NOUVEAU système de ponts à grandes portées, ou moyen économique de construire des arches de toutes grandeurs, in-4., 1827, figures. 7 fr.

* BARROIS (Th.). THÉORIE DES BATEAUX AQUAMOTEURS, propres à remonter les fleuves et à les descendre plus rapidement, par la seule action de leur courant, in-8., 1826, figures. 1 f. 50 c.

BARRUEL, ex-Professeur à l'École Polytechnique. TABLEAUX DE PHYSIQUE, ou Introduction à cette science, à l'usage des Élèves de l'École Polytechnique; nouv. édit., entièrement refondue et augmentée, grand in-4., cart., 1806. 10 fr.

BASTENAIRE-DAUDENART, ancien manufacturier, ex-propriétaire et directeur de la manufacture de porcelaine à fritte de Saint-Amand-les-Eaux. L'ART DE LA VITRIFICATION, ou TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE, THÉORIQUE ET PRATIQUE DE LA FABRICATION DU VERRE; ouvrage dans lequel sont décrits avec précision les divers procédés qu'on emploie pour se procurer toutes les espèces de verres et cristaux colorés, tant pour la formation des vases que pour les vitraux et les pierres imitant les pierres précieuses; ainsi que les manipulations relatives à cette branche importante de l'industrie française; suivi d'un Vocabulaire des mots techniques employés dans cet art, et d'un Traité de la dorure sur cristal et sur verre. 1 vol. in-8°., avec planch. 1825. 7 fr.

BAUDEUX. Arithmétique universelle, traduite de NEWTON. 2 vol. in-4. 40 fr.

* BÉRARD. NOUVELLE MÉTHODE pour déterminer les racines des équations numériques et les intégrales simples ou indéfinies, in-4., 1818. 6 fr.

* BERGERON. MANUEL DU TOURNEUR, ouvrage dans lequel on enseigne aux amateurs la manière d'exécuter sur le tour à pointes, à lunettes, etc., tout ce que l'art peut produire d'utile et d'agréable; précédé de notions élémentaires sur la connaissance des bois, la menuiserie, la fonte des métaux, etc. 2e. édition, revue et augmentée par Hamelin Bergeron. 2 vol. in-4. et atlas, 1816. 60 fr.

* BERGERY, Professeur de sciences appliquées à l'école d'artillerie de Metz, GÉOMETRIE APPLIQUÉE A L'INDUSTRIE, à l'usage des artistes et des ouvriers, in-8., 1825, figures. 5 fr.

* BERGERY. Exercices d'arithmétique à l'usage des jeunes ouvriers qui veulent suivre les cours industriels, in-8., 1826. 50 c.

* — GÉOMÉTRIE DES COURBES, appliquée à l'industrie, à l'usage des artistes et des ouvriers, in-8., 1825, figures. 4 fr.

BERLINGHIERI. EXAMEN DES OPÉRATIONS ET DES TRAVAUX DE CÉSAR AU SIÉGE D'ALÉZIA (œuvre posthume). Lucques, 1812. 3 fr. 50 c.

BERNOULLI (Jacob). L'ART DE CONJECTURER à la Loterie, traduit du latin; par *Vastel*, in-4. 7 fr. 50 c.

BERTHOUD. 1°. L'ART DE CONDUIRE ET DE RÉGLER LES PENDULES ET LES MONTRES, 4e. édit., augmentée d'une planche, et de la manière de tracer la ligne méridienne du temps moyen, 1811, vol. in-12, avec 5 pl. 2 fr. 50 c.

2°. HISTOIRE DE LA MESURE DU TEMPS par les Horloges. Paris, 1802, vol. in-4., avec 23 pl. gravées. 36 fr.

3°. TRAITÉ DES HORLOGES MARINES, contenant la théorie, la construction, la main-d'œuvre de ces machines, et la manière de les éprouver, suivi des éclaircissemens sur l'invention, la théorie, la construction et les épreuves des nouvelles machines proposées en France pour la détermination des longitudes en mer par la mesure du temps; un gros volume in-4., avec 27 planches, 1773. 24 fr.

4°. ÉCLAIRCISSEMENS sur l'invention, la théorie, la construction et les épreuves des nouvelles machines proposées en France pour la détermination des longitudes en mer par la mesure du temps, servant de suite à l'*Essai sur l'Horlogerie* et au *Traité des Horloges marines*, etc., vol. in-4. 6 fr.

5°. LES LONGITUDES PAR LA MESURE DU TEMPS, ou Méthode pour déterminer les longitudes en mer, avec le secours des horloges marines, suivie du Recueil des Tables nécessaires au pilote, pour réduire les observations relatives à la longitude et à la latitude, 1 vol. in-4. 9 fr.

6°. DE LA MESURE DU TEMPS, ou Supplément au Traité des horloges marines et à l'Essai sur l'horlogerie, contenant les principes de constructions, d'exécution et d'épreuves des petites horloges à longitudes portatives, et l'application des mêmes principes de construction, etc., aux montres de poche, ainsi que plusieurs constructions d'horloges astronomiques, etc., onze pl. en taille douce, 1 vol. in-4. 18 fr.

7°. TRAITÉ DES MONTRES A LONGITUDES, contenant la description et tous les détails de main-d'œuvre de ces machines, leurs dimensions, la manière de les éprouver, etc., suivi 1°. du Mémoire instructif sur le travail des montres à longitudes; 2°. de la description de deux Horloges astronomiques; 3°. de l'Essai sur une Méthode simple de conserver le rapport des poids et des mesures, et d'établir une mesure universelle et perpétuelle, avec sept planches en taille-douce.

8°. Suite du Traité des Montres à Longitudes, contenant la construction des Montres verticales portatives, et celle des Horloges horizontales, pour servir dans les plus longues traversées, un volume in-4., avec deux planches en taille-douce. *Prix de ces deux Ouvrages, réunis en un volume*, 24 fr.

9°. Supplément au Traité des Montres à Longitudes, suivi de la Notice des recherches de l'Auteur, depuis 1752 jusqu'en 1807. 12 fr.

Total de cette Collection, 191 fr. 50 c.

* BERTHEVIN. Élémens D'ARITHMÉTIQUE COMPLÉMENTAIRE, ou Méthode nouvelle, par laquelle à l'aide des complémens arithmétiques, on exécute toutes les opérations de calcul. Nouvelle édition, in-8., 1826 5 fr.

BEZOUT. COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES A L'USAGE DE LA MARINE, DE L'ARTILLERIE, et des Élèves de l'École Polytechnique, nouvelle édition, revue et augmentée par M. REYNAUD, Examinateur des Candidats de l'École Polytechnique; et M. de ROSSEL, ancien capitaine de vaisseau, Directeur adjoint du Dépôt général des Cartes, Plans et Archives de la Marine. 6 vol. in-8., avec planches. 31 f. 50.

On vend séparément,

— ARITHMÉTIQUE avec des notes fort éten-

dues, et des Tables de Logarithmes jusqu'à 10,000, etc., par REYNAUD, douzième édit., 1826. 3 fr. 50 c.
Le texte pur se vend séparément, 2 fr.
Les notes seules, 2 fr. 50 c.

— GÉOMETRIE, avec des Notes fort étendues, par *le même*, troisième édit., 1824. 6 fr.
Le texte pur se vend séparément, 4 fr.
Les notes seules, 4 fr.

— ALGEBRE et Application de cette science à l'Arithmétique et à la Géométrie, nouvelle édition, avec des notes, par *le même*; in-8, 1822. 6 fr.
Le texte pur se vend séparément, 4 fr.
Les Notes seules, 4 fr.

— MÉCANIQUE, nouvelle édition, 2 vol. in-8. 10 fr.

— TRAITÉ DE NAVIGATION, nouvelle édition, revue et augmentée de Notes, et d'une Section supplémentaire où l'on donne la manière de faire les Calculs des Observations avec de Nouvelles Tables qui les facilitent; par M. de Rossel, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes. 1 vol. in-8., avec 10 pl. 6 fr.

— NOTES et additions aux trois premières sections du Traité de navigation; par Ant. Reboul. 3 fr.

— Cours de mathématiques avec des notes et additions, par *Peyrard*. GÉOMÈTRIE, 6e. édition in-8. 7 fr.

— Cours de mathématiques à l'usage de l'artillerie, 4 vol. grand in-8. (Texte pur.) 24 fr.

BIOT et ARAGO, Membres de l'académie des Sciences et du Bureau des Longitudes de France. RECUEIL D'OBSERVATIONS GÉODÉSIQUES, ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES, exécutées par ordre du Bureau des Longitudes de France, en Espagne, en France, en Angleterre et en Écosse, pour déterminer la variation de la pesanteur et des degrés terrestres, sur le prolongement du méridien de Paris, faisant suite au troisième volume de la Base du système métrique. 1 vol. in 4, avec fig., 1821. 21 fr.

BIOT. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ASTRONOMIE PHYSIQUE, destiné à l'enseignement dans les Colléges, etc., 3 vol. in-8., 1810.

— PHYSIQUE MÉCANIQUE, par E. G. FISCHER, traduite de l'allemand avec des Notes et un Appendice sur les anneaux colorés, la double refraction et la polarisation de la lumière, 4e. édition, revue et considérablement augmentée, 1 vol. in-8., avec planches. *Sous presse:*

— ESSAI DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre, in 8., 7e. édition, 1826. 6 fr. 50 c.

— TABLES BAROMÉTRIQUES portatives, donnant les différences de niveau par une simple soustraction, in-8. 1 fr. 50 c.

*— Essai sur l'HISTOIRE GÉNÉRALE DES SCIENCES, pendant la révolution française, in-8. 3 fr.

— Recherches sur l'intégration des équations différentielles, partielles, et sur les vibrations des surfaces. (Extrait des mémoires de l'Institut.) in-4. 4 fr.

BOISGENETTE. CONSIDÉRATIONS SUR LA MARINE FRANÇAISE en 1818, et sur les dépenses de ce département, vol. in-8. 1818. 3 fr.

BONNEFOUX, capitaine de frégate, etc. SEANCES NAUTIQUES ou exposé des diverses manœuvres des vaisseaux, in-8., 1824, figures. 5 fr.

BORDA. TABLES TRIGONOMÉTRIQUES DÉCIMALES, ou Tables des Logarithmes des sinus, sécantes et tangentes, suivant la division du quart de cercle en cent degrés, et précédées de la Table des Logarithmes des nombres, etc, calculées par Ch. Borda, rev., augmentées et publiées par J.-B.-J. Delambre. Paris, an IX, in-4. 15 fr.

BORGNIS, Ingénieur et membre de plusieurs académies. TRAITÉ COMPLET DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX ARTS, contenant l'exposition méthodique des théories et des expériences les plus utiles pour diriger le choix, l'invention, la construction et l'emploi de toutes les espèces de machines; ouvrage divisé en *dix Traités* format in-4., avec 249 planches, dessinées par *Girard*, et gravées par *Adam*, 1818 à 1823. 206 fr.

Chaque Traité se vend séparément, ainsi qu'il suit: *Excepté les 4 premiers.*

I. *De la composition des machines*, contenant la classification, la description et l'examen comparatif des organes mécaniques; avec tableaux synoptiques et 43 planches donnant les figures de plus de 1200 organes de machines, 1818 25 fr.

II. *Du mouvement des Fardeaux*, contenant la description et l'examen des machines les plus convenables pour transporter et élever toute espèce de fardeaux; volume de 334 pages et 20 planches gravées, 1818. 20 fr.

III. *Des machines que l'on emploie dans les constructions diverses*, ou Description des Machines dont on fait usage dans les quatre genres d'Architecture, civile, hydraulique, militaire et navale; vol. de 336 pag. avec 26 planches, 1818. 20 fr.

IV. *Des Machines hydrauliques*, ou Machines employées pour élever l'eau nécessaire aux besoins de la vie, aux usages de l'Agriculture, aux épuisemens temporaires et aux épuisemens dans les mines, volume in-4, avec 27 pl., 1819. 20 fr

V. *Des Machines d'Agriculture.* Ce volume décrit les instrumens et machines aratoires, les machines employées à récolter les produits du sol et à leur donner les préparations premières, les moulins et les mécanismes qui servent à épurer le blé et à bluter les farines, et enfin les pressoirs, les cylindres, les pilons et autres machines employées à l'extraction des huiles et du vin, etc.; volume in-4. avec 28 planches, 1819. 21 fr.

VI. *Des Machines employées dans diverses fabrications*, contenant la description des machines en usage dans les grosses forges et dans les ateliers de métallurgie, dans les papeteries, dans les tanneries, etc.; vol. in-4., avec 27 pl., 1819. 21 fr.

VII. *Des Machines qui servent à confectionner les étoffes*, contenant la manière de préparer les matières filamenteuses, animales et végétales, l'examen comparatif des moyens mécaniques employés dans les filatures; la description des métiers avec leurs accessoires pour toutes espèces d'étoffes, depuis les plus simples jusqu'aux plus figurées; enfin, la manière de donner aux étoffes les derniers apprêts avant d'être livrées au commerce; vol. in-4, avec 44 pl., 1820. 30 fr.

VIII. *Des Machines qui imitent ou facilitent les fonctions vitales des corps animés*, suivi d'un appendice sur les machines de théâtres anciens, et sur les procédés en usage dans les théâtres modernes, pour effectuer les changemens à vue, les vols directs et obliques et autres effets; vol. in-4., avec 27 pl., 1820. 21 fr.

IX. THÉORIE DE LA MÉCANIQUE USUELLE, ou Introduction à l'étude de la Mécanique appliquée aux arts, contenant les principes de Statique, de Dynamique, d'Hydrostatique et d'Hydrodynamique applicables aux Arts industriels; la théorie des moteurs, des effets utiles des machines, des organes mécaniques intermédiaires, et l'équilibre des supports, 1 vol. in-4., 1821. 15 fr.

X. DICTIONNAIRE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX ARTS, contenant la définition et la description sommaire des objets les plus importans ou les plus usités qui se rapportent à cette science, avec l'énoncé de leurs propriétés essentielles, suivi d'indications qui facilitent la recherche des détails plus circonstanciés, in-4., 1823 13 fr.

BORGNIS. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE CONSTRUCTION APPLIQUÉE A L'ARCHITECTURE CIVILE, contenant les principes qui doivent diriger, 1°. le choix et la préparation des matériaux; 2°. la configuration et les proportions des parties qui constituent les édifices en général; 3°. l'exécution des plans déjà fixés, suivi de nombreuses applications puisées dans les plus célèbres monumens antiques et modernes, etc., in-4., et Atlas de 30 planches, gravées par Adam, 1823. 36 fr.

BOSSUT. Essai sur l'histoire générale des mathématiques depuis leur origine. 2 vol. in-8. 10 fr.

BOUCHARLAT, Professeur de Mathématiques transcendantes aux Ecoles militaires, Docteur des Sciences, etc. THÉORIE DES COURBES ET DES SURFACES du second ordre, précédés des principes fondamentaux de la Géométrie analytique; seconde édition in-8. 6 fr.

— ÉLÉMENS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL, 3e édition, revue et augmentée, in-8., avec planches, 1826. 6 fr.

— ÉLÉMENS DE MÉCANIQUE, in-8, avec planches, 2e. édition, 1827. 6 fr.

* BOUÉ. ESSAI GÉOLOGIQUE SUR L'ÉCOSSE, in-8., figures. 8 fr.

BOURDÉ-DE-VILLEHUET. LE MANŒUVRIER, ou Essai sur la Théorie et la Pratique des mouvemens du navire et des évolutions navales; nouv. édit., augmentée, 1°. d'un Appendice du même auteur, contenant les principes fondamentaux de l'arrimage des vaisseaux, suivi d'un mémoire sur le même sujet, par Groiguard, ingénieur-constructeur; 2°. des nouvelles Manœuvres du canon, à bord des vaisseaux du Roi, et du Mode d'exercice pour les officiers et les équipages; 1 fort vol. in-8., gr. pap. carré fin, avec 11 pl., 1814. 6 fr.

— PRINCIPES FONDAMENTAUX de l'arrimage des vaisseaux. (*Extrait du Manœuvrier*), in-8 avec 3 planches. 3 fr.

BOURDON, *Inspecteur de l'Académie de Paris.* ELÉMENS D'ARITHMÉTIQUE, 1 vol. in-8., 4e. édit., 1826, *Ouvrage adopté par l'Université*, 5 fr.

— ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, 4e édit. considérablement augmentée, 1 fort vol. in-8., 1825, *Ouvrage adopté par l'Université.* 7 fr.

— APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE à deux et à trois dimensions, 1 fort vol. in-8. avec 15 planches, *Ouvrage adopté par l'Université*, 1825, 7 fr. 50 c.

— Thèse de mécanique, qui a été soutenue le 9 mars 1811 devant la faculté des sciences de Paris, etc., in-4. 3 f. 50 c.

*BRESSON. DES FONDS PUBLICS français et étrangers, et des Opérations de la Bourse de Paris, ou Recueil contenant, 1°. le détail sur les rentes 3 pour cent, 4 et demi pour cent et 5 pour cent consolidés, sur les Canaux; 2°. des notions exactes sur tous les fonds étrangers; 3°. les diverses manières de spéculer, etc.; 5e. édition, revue et augmentée, conformément aux affaires actuelles de la Bourse, in-12, 1825. 3 fr. 50 c.

* — DE LA LIQUIDATION DES MARCHÉS A TERME à la Bourse de Paris; ouvrage contenant des détails sur la méthode des compensations, la circulation et l'endossement des noms, les délégations, la balance générale des feuilles de liquidation, les paiemens et les livraisons des effets publics, etc., avec un aperçu sur les *fonds publics anglais*, faisant connaître la nature et l'état de rentes 3 pour 100 consolidés, 3 p. 100 réduits, 3 et demi pour 100, nouveau 4 pour 100, annuités à vie, annuités longues, effets de la Banque, fonds de la Compagnie de la mer du Sud, fonds de la Compagnie des Indes, bons des Indes, billets de l'échiquier, fonds d'amortissement, etc.; suivi de développemens sur le mode de liquidation en usage aux bourses de Londres, d'Amsterdam et de

Francfort, avec des considérations sur l'influence que les marchés à termes en fonds public doivent exercer sur le crédit en général, et les intérêts commerciaux de chaque pays, in-12, 1816. 2 fr.

BRIANCHON, Capitaine d'artillerie. APPLICATION DE LA THEORIE DES TRANSVERSALES. Cours d'opérations géom. sur le terrain, etc., 1818, in-8. 1 fr. 80 c.

— MÉMOIRE sur les lignes du second ordre 1817, in-8. 2 fr.

BRISSON. DICTIONNAIRE RAISONNÉ DE PHYSIQUE, 6 vol. in-8., et atlas in-4. 36 fr.

— PESANTEUR SPÉCIFIQUE DES CORPS, ouvrage utile à l'Histoire naturelle, à la Physique, aux Arts et au Commerce, 1 vol. in 4., avec pl. 15 fr.

BUQUOY. (Comte de) Exposition d'un nouveau Principe général de DYNAMIQUE, dont le principe des Vitesses virtuelles n'est qu'un cas particulier; lu à l'Institut de France le 28 août 1815, in-4. 2 fr.

BUREAU DES LONGITUDES DE FRANCE.

* OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES faites à l'observatoire royal de Paris, publiées par le Bureau des Longitudes, tome 1er. in-folio, 1825. 50 fr.

* TABLES DE JUPITER, DE SATURNE ET D'URANUS, par M. BOUVARD, in-4. 2e. édition. 12 fr.

* TABLES DE LA LUNE, par M. BURCKHARDT, in-4. 8 fr.

* TABLES DU SOLEIL, par M. DELAMBRE, et Tables de LA LUNE, par M. BURG, in-4. 18 fr.

* TABLES ÉCLIPTIQUES DES SATELLITES DE JUPITER, par M. DELAMBRE, in-4. 10 fr.

* TABLES DE LA LUNE, formées par la seule théorie de l'attraction, par M. le baron de DAMOISEAU, in-4. 12 fr.

* CONNAISSANCE DES TEMPS, à l'usage des astronomes et des navigateurs, pour les années 1827, 1828 et 1829. Prix de chaque année avec additions 6 fr., sans additions 4 fr.

* ANNUAIRE présenté au Roi par le Bureau des Longitudes, in-18. (Cet ouvrage paraît tous les ans.) 1 fr.

BURCKHARDT, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes de France. TABLE DES DIVISEURS POUR TOUS LES NOMBRES DU 1er., 2e. ET 3e. MILLION, avec les nombres premiers qui s'y trouvent; grand in-4., pap. vélin, 1817. 36 fr. Chaque million se vend séparément, savoir: le 1er. million, 15 fr. les 2e. et 3e. chacun 12 fr.

CAGNOLI. TRAITÉ DE TRIGONOMÉTRIE, traduit de l'italien, par M. Chompré, 2e. édition, in-4., 1808. 18 fr.

— Catalogue de 501 étoiles, suivi de tables relatives d'aberration et de nutation, etc., Modène, 1807, in-4. 6 fr.

CAMUS DE MÉZIÈRES. TRAITÉ SUR LA FORCE DES BOIS DE CHARPENTE, ouvrage essentiel pour ceux qui veulent bâtir, et qui donne les moyens de procurer plus de solidité aux édifices, de connaître la bonne et la mauvaise qualité des Bois, de calculer leur force, etc., in-8. 6 fr.

CANARD, Professeur de Mathématiques transcendantes au Lycée de Moulin. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DU CALCUL DES ÉQUATIONS, in-8. 1808. 6 fr.

CARNOT, Général, Membre de l'Institut et de la Légion-d'Honneur, etc. DE LA DÉFENSE DES PLACES FORTES. Ouvrage composé pour l'instruction des Élèves du Corps du Génie, troisième édition, revue et considérablement augmentée, avec 11 pl. 1 vol. in-4., 1812. 25 fr.

Le même Ouvrage, deuxième édit., sans planch., in-8., 1811. 6 fr.

— MÉMOIRE SUR LA FORTIFICATION primitive, pour servir de suite au Traité sur la défense des Places fortes, in-4., fig., 1823. 6 fr.

— GÉOMÉTRIE DE POSITION, in-4., papier vélin, 1803. 18 fr.
Le même Ouvrage, grand pap. vél. 36 fr.

— MÉMOIRE SUR LA RELATION qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace; suivi d'un ESSAI SUR LA THÉORIE DES TRANSVERSALES, in-4., 1806. 5 fr.

— DE LA CORRÉLATION DES FIGURES DE GÉOMÉTRIE, an 9, in-8., gr. pap. 3 fr.

— RÉFLEXIONS SUR LA MÉTAPHYSIQUE DU CALCUL INFINITÉSIMAL, in-8, fig., nouv. édit., revue et augmentée, 1813. 3 fr. 50 c.

— PRINCIPES DE L'ÉQUILIBRE et du Mouvement, in-8., 1803. 5 fr.

*CARNOT, *ancien élève de l'École polytechnique*. RÉFLEXIONS SUR LA PUISSANCE MOTRICE DU FEU, in-8., 1824. 3 fr.

CHARPENTIER, *capitaine au corps royal d'artillerie de marine*. TRAITÉ D'ARTILLERIE NAVALE, contenant un exposé succinct de la théorie du pendule ballistique et des expériences de Hutton; les principes fondamentaux de l'artillerie navale, etc., traduit de l'anglais de Douglas, in-8., 1826, figures. 7 fr.

CHLADNI. TRAITÉ D'ACOUSTIQUE, in-8., avec 8 planches. 7 fr. 50 c.

CHRISTIAN, Directeur du Conservatoire des Arts et Métiers. TRAITÉ DE MÉCANIQUE INDUSTRIELLE, ou Exposé de la science de la Mécanique, déduite de l'expérience et de l'observation, à l'usage des manufacturiers et des artistes; 3 vol. in-4 et Atlas de 60 pl. doubles, 1825. 75 fr.

— DES IMPOSITIONS et de leur influence sur l'industrie agricole, etc., in-8. 2 f. 50 c.

CLAIRAUT. ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, 6. édit., avec des Notes et des Additions très-étendues, par M. Garnier; précédés d'un Traité d'Arithmétique par Thévenau, et une Instruction sur les nouveaux poids et mesures, 2 vol. in-8., 1801, 10 fr

— THÉORIE DE LA FIGURE DE LA TERRE, tirée des principes de l'Hydrostatique, in-8, deux. édit., 1808. 10 fr

CLOQUET (J. B.), ex-Professeur de Dessin à l'École des Mines et à celle de la Brigade topographique au Dépôt des fortifications. NOUVEAU TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE PERSPECTIVE à l'usage des artistes et des personnes qui s'occupent du Dessin, précédé des premières notions de la Géométrie élémentaire, de la Géométrie descriptive, de l'Optique et de la projection des ombres. 1 vol. in-4., et atlas de 84 pl., dont plusieurs coloriées, 1823. 30 fr.

CONDORCET. MOYENS FACILES D'APPRENDRE A COMPTER avec facilité; deux. édit., in-12. 1 fr. 25 c.

CORNIBERT. Manuel du canonnier marin, in-8. 6 fr.

— TABLE DE PORTÉES DES CANONS et carronades en usage dans la marine; précédée de l'application des principes théoriques et pratiques de l'artillerie, au tir de ces bouches à feu à bord des vaisseaux de guerre, in-8., figures, 1807. 6fr.

COTTE. Tables des articles contenus dans LE JOURNAL DE PHYSIQUE, in-4. 6 fr.

— TABLE DES MATIÈRES contenues dans les Mémoires de l'Académie, pour les années 1781 à 1790. tome X. 15 fr.

COULOMB, Membre de l'Institut de France. THÉORIE DES MACHINES SIMPLES, en ayant égard au frottement de leurs parties et à la raideur des cordages. *Nouvelle édit.*, à laquelle on a ajouté les Mémoires suivans du même auteur: sur les frottemens de la pointe des pivots; — Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de métal; — Résultats de plusieurs expériences destinées à déterminer la quantité d'action que les hommes peuvent fournir par leur travail journalier, suivant les différentes manières dont ils emploient leurs forces; — Observations théoriques et expérimentales sur l'effet des moulins à vent et sur la figure de leurs ailes; — sur les murs de revêtement et l'équilibre des voûtes, etc. vol. in-4., avec 10 pl., 1821. 15 fr.

COULOMB. RECHERCHES SUR LES MOYENS d'exécuter sous l'eau toutes sortes de travaux hydrauliques sans employer aucun épuisement, in-8., 3e. édit. 1 fr. 80 c.

COUSIN. Traité du CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL, 2 vol. in-4, 6 pl. 21 fr.

— Traité élém. de l'ANALYSE MATHÉMATIQUE ou d'ALGÈBRE, in-8. 4 fr.

D'ABREU. PRINCIPES MATHÉMATIQUES de J.-A. Chuna, traduit du portugais, in-8. 5 fr.

* DARCET. Mémoire sur la construction des latrines publiques, et sur l'assainissement des latrines et des fosses d'aisances, in-8., figures, 1822. 1 f. 50 c.

* — Description d'un fourneau de cuisine avec 2 planches, 1821. 2 f. 50 c.

* — MÉMOIRE SUR LES SOUFFROIRS, in-8., figures, 1821. 1 f. 50 c.

DAUBUISSON. MÉMOIRE SUR LES BASALTES DE LA SAXE, accompagné d'Observations sur l'origine des Basaltes en général, lu à la Classe des Sciences physiques et mathématiques de l'Institut national, an 11, in-8. 2 fr. 50 c.

DAULNOY. Calcul des intérêts de toutes les sommes, à tous les taux et pour tous les jours de l'année, etc., in-12. 1 f. 80 c.

DECESSART. DESCRIPTION DES TRAVAUX HYDRAULIQUES, 2 vol. in-4., 67 pl. 81 fr.

DELAISTRE. Science des ingénieurs, divisée en trois livres, où l'on traite des Chemins, des Ponts, des Canaux et des Aquéducs, 2 vol. in-4., et Atlas, 1825. 40 fr.

DELAMBRE, Secrétaire perpétuel de l'Institut, membre de la Légion d'Honneur, professeur d'astronomie au collège royal de France, etc. TRAITÉ COMPLET D'ASTRONOMIE THÉORIQUE ET PRATIQUE, 3 vol. in-4., avec 29 pl., 1814. 60 fr.

— Abrégé du même Ouvrage, ou LEÇONS ÉLÉMENTAIRES D'ASTRONOMIE théorique et pratique données au collège de France, 1 v in-8, avec 17 pl., 1813.

— HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE ANCIENNE, 2 vol. in-4., avec 17 pl., 1817. 40 fr.

— HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE DU MOYEN AGE, 1 vol. in-4., 1819, avec 17 pl. en taille-douce. 25 fr.

— HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE MODERNE, 2 vol. in-4., avec 17 pl, 1821. 50 fr.

DELAMBRE. HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE DU XVIIIe. SIÈCLE, in-4. 1827. 36 fr.

DELAMBRE et LEGENDRE. Méthode analytique pour la DÉTERMINATION D'UN ARC DU MERIDIEN, in-4, an 7. 9 fr.

DELAMÉTHERIE, professeur au collége de France, ancien rédacteur du Journal de physique, etc. CONSIDÉRATIONS SUR LES ÊTRES ORGANISÉS, 2 vol. in-8. 12 fr.

— DE LA PERFECTIBILITÉ ET DE LA DÉGÉNÉRESCENCE DES ÊTRES ORGANISÉS, formant le tome III des Considérations sur les êtres organisés, 1 vol. in-8. 6 fr.

— DE LA NATURE DES ÊTRES EXISTANS, ou Principes de la philosophie naturelle, 1 vol. in-8. 6 fr.

— LEÇONS DE MINÉRALOGIE données au collége de France, 2 vol. in-8., 1812. 14 fr.

DELAU. DÉCOUVERTE DE L'UNITÉ et généralité de principe, d'idée et d'exposition

de la science des nombres, son application positive et régulière à l'algèbre, à la géométrie, et surtout à la pratique, aux développemens et à l'extension du précieux système décimal. Calculs théori-pratiques, 1809. 1 vol. in-8. 3 fr

DELUC. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE GEOLOGIE, in-8., 1809. 5 fr.

— Recherches sur les modifications de l'atmosphère. 4 vol. in 8. 20 fr.

— Précis de la philosophie de Bacon et des progrès qu'ont faits les sciences naturelles, 2 vol. in-8. 10 fr.

DEMONFERRAND, Professeur de Mathématiques et de Physique au Collége de Versailles. MANUEL D'ELECTRICITÉ DYNAMIQUE, ou Traité sur l'action mutuelle des conducteurs électriques et des aimans, et sur la nouvelle théorie du magnétisme, pour faire suite à tous les Traités de Physique élémentaire, in-8., 1823, avec 5 planches. 4 fr.

DEPRASSE, *professeur de mathématiques à Berlin*. TABLES LOGARITHMIQUES pour les nombres, les sinus et les tangentes, disposées dans un nouvel ordre, corrigées et précédées d'une Introduction; traduites de l'allemand et accompagnées de notes par *Halma*, 1814, in-18. 1 fr.

DESTUTT-TRACY. ELÉMENS D'IDÉOLOGIE, 4 vol. in-8. 22 fr.

Chaque volume se vend séparément, savoir :

IDÉOLOGIE proprement dite. 5 fr.
GRAMMAIRE. 5
LOGIQUE. 6
TRAITÉ DE LA VOLONTÉ 6

EVELEY, professeur de mathématiques, etc. APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE, in 4, nouvelle édit., 1823, in-4°. 14 fr.

DIONIS-DU-SÉJOUR. TRAITÉ DES MOUVEMENS APPARENS DES CORPS CÉLESTES, 2 vol in-4. 40 fr.

D'OBENHEIM voyez OBENHEIM.

DUBOURGUET, ancien officier de marine, professeur de mathématiques au collége Louis-le-Grand. TRAITÉS ÉLÉMENTAIRES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL, indépendans de toutes notions de quantités infinitésimales et de limites; ouvrage mis à la portée des commençans, et où se trouvent plusieurs nouvelles théories et méthodes fort simplifiées, d'intégrations, avec des applications utiles aux progrès des sciences exactes, 2 v. in-8. *Paris*, 1810 et 1811. 16 fr.

— TRAITÉ DE LA NAVIGATION, ouvrage approuvé par l'Institut de France, et mis à la portée DE TOUS LES NAVIGATEURS, in-4., 1808, avec fig. 20 fr.

DUBRUNFAUT, *Membre de la Société d'Encouragement pour l'industrie nationale, etc.* TRAITÉ COMPLET DE L'ART DE LA DISTILLATION, contenant, dans un ordre méthodique, les instructions théoriques et pratiques les plus exactes et les plus nouvelles sur la préparation des liqueurs alcoholiques avec les raisins, les grains, les pommes-de-terre, les fécules et tous les végétaux sucrés ou farineux, 2 vol. in-8., fig., 1824. 10 fr. 50 c.

— ART DE FABRIQUER LE SUCRE DE BETTERAVES, contenant : 1°. la description des meilleures méthodes usitées pour la culture et la conservation de cette racine; 2°. l'exposition détaillée des procédés et appareils utiles pour en extraire le sucre avec de grands avantages. Suivi d'un essai d'analyse chimique de la betterave, propre à éclairer la théorie des opérations qui ont pour objet d'en séparer la matière sucrée; 1 vol. in-8; avec pl., 1825. 7 fr. 50 c.

DUCOUEDIC. LA RUCHE PYRAMIDALE, méthode simple et naturelle pour rendre perpétuelles les peuplades d'abeilles, et obtenir de chaque peuplade, à chaque automne, la récolte d'un panier plein de cire et de miel, sans mouches, sans couvains, outre plusieurs essaims, avec l'art de rétablir et d'utiliser, au retour de l'été, les ruches des essaims dont les peuplades auraient péri en automne, dans l'hiver ou au printemps, en faisant éclore les œufs restés dans les alvéoles; et l'Art de convertir le miel en sucre blanc inodore, de faire l'hydromel, des sirops, etc., ouvrage utile aux habitans des campagnes; deux. édit., considérablement augmentée, et ornée d'une gravure, 1 vol. in-8, 1813. 3 fr.

DUCREST. VUES NOUVELLES SUR LES COURANS D'EAU, la navigation intérieure et la marine, 1 vol. in-8., 1803. 5 fr.

DUFOUR. ESSAI DE GÉOLOGIE. in-8 1 fr.

* — DUFOUR, *de Genève*. GEOMETRIE PERSPECTIVE, avec ses applications à la recherche des ombres; in-8. et atlas in-4., 1827. 6 fr.

DUFRÉNOY, *ingénieur des mines*. Voyez *page* 12.

* DULEAU, ingénieur des ponts et chaussées, Essai théorique et expérimental sur la RÉSISTANCE DU FER FORGÉ, in-4., figures. 8 fr.

DUMAS (l'*abbé*). Nouvelles méthodes pour resoudre les équations d'un degré supérieur, in-8., 1815. 2 f. 50 c.

DUPAIN NOUVEAU TRAITÉ DE TRIGONOMÉTRIE rectiligne; in-8. 6 fr.

— LA PRATIQUE DU DESSIN dans l'architecture bourgeoise, in-8. figures. 3 fr.

*DUPIN (C.), *membre de l'Institut*. VOYAGES DANS LA GRANDE BRETAGNE entrepris relativement aux services publics de la guerre, de la marine et des ponts et chaussées, en 1816, 1817, 1818, 1819, 1820 et 1821, présentant le tableau des institutions et des établissemens qui se rapportent à

I. la Force militaire;
II. la Force navale;
III. aux Travaux civils des ports de commerce, des routes, des ponts et des canaux; 2°. SECTION.
IV. Force productive.

Chaque partie se vend séparément.

Ire. partie, FORCE MILITAIRE, 2 vol. in-4. et atlas 2°. édit., 1825. 25 fr.
IIe. partie, FORCE NAVALE, 2 vol. in-4. et atlas 2°. édit, 1825. 25 fr.
IIIe. partie, FORCE COMMERCIALE, 1re. SECTION, 2°. édit. TRAVAUX CIVILS DES PONTS ET CHAUSSÉES, 2 vol. in-4., et atlas, 1824. 27 fr.
IVe. partie. FORCE COMMERCIALE EXTÉRIEURE, 2°. SECTION, paraîtra dans le courant de 1827.

* — FORCES COMMERCIALES ET PRODUCTIVES DE LA FRANCE, 2 vol. in-4., avec deux grandes cartes, 1827. 25 fr

* — SITUATION PROGRESSIVE DES FORCES DE LA FRANCE depuis 1814, in-4., 1827.

*— GÉOMÉTRIE ET MÉCANIQUE DES ARTS ET DES BEAUX-ARTS, COURS NORMAL à l'usage des ouvriers et des artistes, des sous-chefs et des chefs d'ateliers et de manufactures, professé au Conservatoire royal des Arts et Métiers par l'auteur; 3 vol. in-8 18 fr. et 24 fr. franc de port.

1er. *volume*. GÉOMÉTRIE, ou des Formes nécessaires à l'Industrie. 6 fr
2me. *volume*. MACHINES ÉLÉMENTAIRES nécessaires à l'Industrie. 6 fr.
3me. *volume*. FORCES MOTRICES nécessaires à l'Industrie. 6 fr.

Chaque leçon se vend séparément 40 c. et 50 franc de port.

* — DISCOURS ET LEÇONS SUR L'INDUSTRIE, le Commerce, la Marine, et sur les Sciences appliquées aux Arts, 2 vol. in 8, 1825. 10 f. 50c.

— DÉVELOPPEMENS DE GÉOMÉTRIE 1 vol. in-4°. 1813. 15 fr

— APPLICATIONS DE GÉOMÉTRIE ET DE MÉCHANIQUE A LA MARINE, aux Ponts et Chaussées, etc. in-4., 1822. 15 fr

—ESSAI HISTORIQUE sur les services et les travaux scientifiques de G. Monge, etc., in-8, 1819. 4 fr. 50 c.

— *Le même*, in-4 avec portrait parfaitement ressemblant. 7 fr. 50 c.

DUPIN. ESSAIS SUR DÉMOSTHÈNES et sur son éloquence, contenant une traduction des Harangues pour Olynthe, avec le texte en regard; des considérations sur les beautés des pensées et du style de l'Orateur athénien, in-8., 1814. 4 fr.

— LETTRE A MILADY MORGAN, sur Shakespeare, in-8., 1818. 2 fr. 50 c.

*— SYSTÈME de l'administration britannique en 1822, considérée sous les rapports des finances, de l'industrie, du commerce et de la navigation, d'après un exposé ministériel, in-8., 1822. 3 fr.

*—OBSERVATIONS sur la puissance de l'Angleterre et sur celle de la Russie au sujet du parallèle établi par M. De Pradt entre ces puissances, deuxième édition, in-8., 1824, 1 fr. 50 c.

* — PROGRÈS DES SCIENCES ET DES ARTS de la marine française depuis la paix. in-8., 1820. 1 f. 25 c.

* — TABLEAU DES ARTS ET MÉTIERS et des beaux-arts, pour servir d'introduction à son *Cours de géométrie et de mécanique appliquées aux arts* professé dans les villes de France, in-8., 1826. 2 fr.

* — EFFETS DE L'ENSEIGNEMENT populaire de la lecture, de l'écriture, de l'arithmétique, de la géométrie et de la mécanique appliquée aux arts, in-8., 1826. 1 fr.

* — Rapport fait à l'Institut de France, sur les avantages, les inconvéniens et les dangers des machines à vapeur, in-8., 1825 1 f. 25 c.

* — Du rétablissement de l'académie de marine, in-8., 1815. 1 f. 50 c.

* — Considérations sur les avantages de l'industrie et des machines en France et en Angleterre, in-8., 1825. 1 f. 25 c.

* — Inauguration de l'amphithéâtre du Conservatoire des arts et métiers, in-8., 1822. 1 f. 50 c.

* — Influence du commerce sur le savoir, sur la civilisation des peuples anciens et sur leur force navale, in-8. 1822. 1 f. 25 c.

* — Du commerce et de ses travaux publics en France et en Angleterre, in-8., 1823. 1 f. 50 c.

* — Tableau de l'architecture navale au dix-huitième siècle, in-4. 1 f. 80 c.

* — AVANTAGES SOCIAUX d'un enseignement public appliqué à l'industrie, in-8, 1821. 1 f. 25 c.

* — Progrès de l'industrie française, depuis le commencement du dix-neuvième siècle, in-8, 1824. 1 f. 50 c.

* — INTRODUCTION d'un nouveau cours de mécanique, appliquées aux arts, à l'usage des ouvriers, etc. Discours prononcé le 11 novembre 1824, in-8. 1 f. 50 c.

* — Second DISCOURS sur la géométrie et la mécanique, appliquées aux arts; prononcé le 24 décembre 1824, in-8. 1 f. 50 c.

* — DISCOURS prononcé le 26 mars 1825 au Conservatoire des arts et métiers, pour la clôture du cours, in-8. 1 f. 50 c.

DUPUIS. MÉMOIRE EXPLICATIF DU ZODIAQUE chronologique et mythologique, ouvrage contenant le tableau comparatif des maisons de la lune chez les différens peuples de l'Orient, et celui des plus anciennes observations qui s'y lient, d'après les Egyptiens, les Chinois, les Perses, les Arabes, les Chaldéens, etc., in-4., 1806. 7 fr.

DUTENS. Analyse raisonnée des PRINCIPES FONDAMENTAUX DE L'ÉCONOMIE POLITIQUE, in 8., 1814. 3 fr.

DUVILLARD. Recherches SUR LES RENTES ET LES EMPRUNTS, in-4. 10 fr.

— Analyse et tableau DE L'INFLUENCE DE LA PETITE VÉROLE sur la mortalité à chaque âge, et de celle d'un préservatif, tel que la vaccine peut avoir sur la population et la longévité, in-4, 1806. 10 fr.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

*JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, par MM. Lagrange, Laplace, Monge, Prony, Fourcroy, Berthollet, Vauquelin, Lacroix, Hachette, Poisson, Sganzin, Guy-

ton-Morveau, Barruel, Legendre; Haüy, Malus.
La Collection jusqu'à la fin 1823, contient 19 Cahiers in-4. avec des planches. 129 fr.
Chaque Cahier séparé se vend 6 fr.
Excepté le 9e. qui coûte 15 fr.
Les 17e. et 19e., qui coûtent chacun 9 fr.
Et le 18e. 7 fr. 50 c
Correspondance de l'École Polytechnique, par M. Hachette, 3 vol. in-8. (Rare.)
Le n°. 3 du tome 3e. se vend séparément 4 f.
* ÉPURES A L'USAGE DE L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE, contenant 102 planches gravées in-fol., (sans texte), sur la géométrie descriptive, la charpente, la coupe des pierres, la perspective et les ombres Prix en feuilles, 24 fr.
* COLLECTION D'ÉPURES DE TOPOGRAPHIE A LUMIÈRE OBLIQUE (ancien système), 15 pl in-folio sans texte. 7 fr
* COLLECTION D'ÉPURES DE TOPOGRAPHIE A LUMIÈRE DIRECTE (nouveau système), 13 planches in-folio sans texte. 7 fr.
* — RELATIVES A LA FORTIFICATION DES PLACES ET DE CAMPAGNE, 56 planches in-folio sans texte. 15 fr.

ÉCOLE DE LA MINIATURE, ou l'Art d'apprendre à peindre sans maître, nouvelle édition revue, corrigée et augmentée. 1 vol. in-12, fig. 1816. 3 fr.
ÉLIE DE BEAUMONT. (*Voyez Dufrénoy*).
EUCLIDE. OEUVRES EN GREC, LATIN ET FRANÇAIS, d'après un manuscrit très-ancien, qui était resté inconnu jusqu'à nos jours; par Peyrard, traducteur des Œuvres d'Archimède, ouvrage approuvé par l'Académie des sciences; 3 vol. in-4., 1814, 1817 et 1818. 90 fr.
Les mêmes, papier vélin. 120 fr.
Les mêmes, tirées sur papier grand-raisin fin, 120 fr.
Les mêmes, sur papier grand-raisin vélin. 180 fr.
Il ne reste plus que quelques exemplaires de ces trois derniers papiers.
EULER. ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, nouvelle édit, 1807, 2 vol in-8. 12 fr.
— LETTRES à une Princesse d'Allemagne, sur divers sujets de PHYSIQUE ET DE PHILOSOPHIE. Nouv. édit., conforme à l'édition originale de Saint-Pétersbourg, revue et augmentée de l'ÉLOGE D'EULER par *Condorcet*, et de diverses Notes par *M. Labey*, docteur ès-Sciences de l'Université, Instituteur à l'École Polytechnique, etc., 2 forts vol. in-8. de 1180 pag., imprimés en caractère neuf et sur papier carré fin avec le portrait de l'auteur, 1812, broch. 15 fr.
EVANS (OLIVER). MANUEL DE L'INGÉNIEUR-MÉCANICIEN, Constructeur de machines à vapeur, traduit de l'anglais par Doolittle, in-8., avec 7 pl., 2e. édit, 1825. 5 fr.
EXERCICES et Manœuvres du canon à bord des vaisseaux du Roi, et Règlement sur le mode d'exercice des officiers et des équipages; nouvelle édition, augmentée de Nouvelles Manœuvres des deux bords, et de plusieurs Tables de Pointage, extraites de Churucca, par un officier de marine (Willaumez); 1 vol. in-8., 1815. 2 fr
FATIO. Tables d'INTÉRÊTS SIMPLES et composés, suivies de celles de *Buffon* et de *Halley* sur la mortalité dans les différens âges, in-folio. 18 fr.
FAVIER, *Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées*. EXAMEN DES CONDITIONS DU MODE D'ADJUDICATION DES TRAVAUX PUBLICS, suivi de Considérations sur l'emploi de ce mode et de celui de régie, br. in-8., 1824. 2 fr.
FISCHER, Membre honoraire de l'Académie des Sciences de Berlin, etc. PHYSIQUE MÉCANIQUE, traduite de l'allemand, avec des Notes et un Appendice sur les anneaux colorés, la double réfraction et la polarisation de la lumière, par M. BIOT, membre de l'Institut, 4e. édit., revue et considérablement augmentée, 1 vol in-8., avec pl., *Sous Presse*:
FLEURIEU, *membre de l'Institut*, VOYAGE AUTOUR DU MONDE pendant les années 1790, 1791 et 1792, par ÉTIENNE MARCHAND, précédé d'une introduction historique, auquel on a joint des recherches sur les terres australes de Drake, et un examen critique du voyage de Roggewen avec cartes et figures, 4 vol. in-4. et atlas 60 fr.
LE MÊME OUVRAGE, 5 vol. in-8 et atlas in-4. 30 fr.
FORFAIT. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE LA MATURE DES VAISSEAUX, à l'usage des élèves de la Marine; *seconde édit.*; augmentée d'un grand nombre de Notes et de Tables; par M. Villaumez, capitaine de vaisseau: suivi d'un Appendice contenant un Mémoire sur le Système de construction des Mâts d'assemblage en usage dans les Ports de Hollande, et sur les Modifications que l'on propose d'y apporter; par M. Rolland, inspecteur-adjoint du Génie maritime; 1 vol. in-4., avec 25 pl., 1825. 18 fr.
FOURCROY. TABLEAUX SYNOPTIQUES DE CHIMIE, in-fol. cart. 9 fr.
FRANCOEUR Professeur de la Faculté des Sciences de Paris, ex-Examinateur des Candidats de l'École Polytechnique, etc. URANOGRAPHIE, ou Traité élémentaire d'Astronomie, à l'usage des personnes peu versées dans les mathématiques, des Géographes, des Marins, des Ingénieurs, accompagnée de planisphères, troisième édition, revue et considérablement augm., 1 vol. in-8., 1821, avec planches. 9 fr.
— TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE MÉCANIQUE, 6e. édition, in-8. 1825. 7 fr. 50c.
— ÉLÉMENS DE STATIQUE, in-8. 3 fr.
— COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES PURES, dédié à S. M. Alexandre Ier, Empereur de toutes les Russies; Ouvrage destiné aux Élèves des Écoles Normale et Polytechnique, et aux Candidats qui se disposent à y être admis, 2e. édit., revue et considérabl. augm., 2 vol. in-8., avec pl., 1819. 15 fr.
* — LA GONIOMÉTRIE, ou l'art de tracer sur le papier des angles, dont la graduation est connue, et d'évaluer le nombre de degrés d'un angle déjà tracé, accompagné d'une table des cordes de 1 à 10,000, in-8, figur. 1 f. 25 c.
* — L'enseignement DU DESSIN LINÉAIRE, d'après une méthode applicable à toutes les écoles primaires, quel que soit le mode d'instruction qu'on y suit, 2e. édition, 1 vol. in-8. et atlas, in-folio de 12 planches, 1827. 7 fr.
FRANÇAIS, professeur à Metz MÉMOIRE SUR LE MOUVEMENT DE ROTATION d'un corps solide autour de son centre de masse, in-4., 1813. 2 f. 50 c.
FRAY, Commissaire-Ordonnateur des Guerres, Membre de la Légion-d'Honneur, etc. ESSAI SUR L'ORIGINE DES CORPS ORGANISÉS ET INORGANISÉS, et sur quelques phénomènes de Physiologie animale et végétale, 1 vol. in-8, 1817. 5 fr.
* FULTON (Robert). RECHERCHES SUR LES MOYENS DE PERFECTIONNER LES CANAUX DE NAVIGATION et sur les nombreux avantages des petits canaux, in-8., avec le supplément. 7 f. 50 c.
GALLON. Recueil de Machines approuvées par l'Académie, 7 vol. in-4., avec 945 planches. 150 fr
— Le 7e. volume se vend séparément. 30 fr.
GARNIER. *Ingénieur des Mines, ancien Élève de l'École Polytechnique*. TRAITÉ SUR LES PUITS ARTÉSIENS, ou sur les différentes espèces de Terrains dans lesquels on doit rechercher des eaux souterraines. Ouvrage contenant la description des procédés qu'il faut employer pour ramener une partie de ces eaux à la surface du sol, à l'aide de la sonde du mineur ou du fontainier; seconde édition, revue et augmentée, avec 25 planches, in-4, 1826. 16 fr.
GARNIER. TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE, à l'usage des Élèves de tout âge, 2e. édit.; in-8., 1808. 2 fr. 50 c.
— ÉLÉMENS D'ALGÈBRE à l'usage des Aspirans à l'École Polytechnique, 3e. édit., in-8., revue, et augmentée, 1811. 6 fr.
— Suite de ces Élémens, 2e. partie. ANALYSE ALGÉBRIQUE, nouvelle édition considérablement augmentée; in-8., 1814. 7 fr.
— GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, ou application de l'Algèbre à la Géométrie, seconde édition, revue et augm., 1 vol. in-8. avec 14 pl., 1813. 6 fr.
— LES RÉCIPROQUES de la Géométrie, suivi d'un Recueil de Problèmes et de Théorèmes, et de la construction des Tables trigonométriques, in-8., 2e. édition, considérablement augmentée, 1810.
— ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE, contenant les deux Trigonométries, les élémens de la Polygonométrie et du levé des Plans, et l'Introduction à la Géométrie descriptive, 1 vol. in-8 avec pl., 1812. 5 fr.
— LEÇON DE STATIQUE à l'usage des Aspirans à l'École Polytechnique, 1 vol. in-8. avec douze pl., 1811. 5 fr.
— LEÇONS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL, 3e. édit., 1 vol. in-8. avec 4 pl., 1811. 7 fr.
— LEÇONS DE CALCUL INTÉGRAL, 1 vol. in-8 avec deux pl., 1813. 7 fr.
— TRISECTION DE L'ANGLE, suivie de Recherches analytiques sur le même sujet., in-8., 1809. 2 fr. 50 c.
— DISCUSSION DES RACINES des Équations déterminées du premier degré à plusieurs inconnues, et élimination entre deux équations de degrés quelconques à deux inconnues, 2e. édit., 1 vol. in-8. 1 fr. 80 c.
GAUSS. RECHERCHES ARITHMÉTIQUES, traduites par M. Poulet-Delisle, Élève de l'École Polytechnique et Professeur de Mathématiques à Orléans, 1 vol. in-4., 1807. 18 fr.
* GERMAIN (Mlle. SOPHIE). RECHERCHES SUR LA THÉORIE DES SURFACES ÉLASTIQUES, in-4., 1824. 5 fr.
* — REMARQUES sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques, et équation générale de ces surfaces, in-4. 1826. 1 f. 50 c.
GICQUEL-DESTOUCHES, Capitaine de Vaisseau. TABLES COMPARATIVES des principales Dimensions des Bâtimens de guerre français et anglais de tous rangs, de leur Mâture, Gréement, Artillerie, etc., d'après les derniers règlemens, avec plusieurs autres Tables relatives à un Système de mâture proposé comme plus convenable que celui actuel, aux bâtimens de guerre français; ouvrage utile aux officiers de la Marine royale, in-4. 9 fr.
GILBERT, Ingénieur de Marine. ESSAI SUR L'ART DE LA NAVIGATION PAR LA VAPEUR, 1 vol. in-4 avec trois grandes planches, 1820. 5 fr.
GIRARD, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Directeur du Canal de l'Ourcq et des eaux de Paris, etc. RECHERCHES EXPERIMENTALES SUR L'EAU ET LE VENT, considérés comme forces motrices applicables aux moulins et autres machines à mouvement circulaire, traduit de l'anglais de *Smeaton*, 2e. édit. in 4., avec pl 1827 9 fr.
— DEVIS GÉNÉRAL DU CANAL DE L'OURCQ, 2e. édition, in-4., avec une grande carte, 1820. 6 fr.
— MÉMOIRE SUR LES GRANDES ROUTES, LES CHEMINS DE FER et les canaux de navigation; traduit de l'allemand de GERSTNER, par P. TERQUEM, et précédé d'une introduction, par M. P.-S. GIRARD, in-8., 1824, figures. 6 f 50 c.
* — DEVIS DU CANAL SAINT-MARTIN, in-4., avec une grande carte, 1820. 3 fr.
* — Nouvelles observations SUR LE CANAL SAINT-MARTIN et supplément au devis général, in-4 avec une grande planche colorière, 1821. 6 fr.

* GIRARD. Essai sur le mouvement des eaux courantes et la figure qu'il convient de donner aux canaux qui les contiennent, in-4. 6 fr.
* — Mémoire pour servir d'introduction au devis général des ouvrages à exécuter pour la distribution des eaux du canal de l'Ourcq, dans l'intérieur de Paris, in-4, figures. 15 fr.
* — Recherches sur les eaux publiques de Paris, les distributions successives qui en ont été faites, et les divers projets qui ont été proposés pour les augmenter. 4 vol. in-4. avec planches, 1812. 15 fr.
* — Description générale des différens ouvrages à exécuter pour la distribution des eaux du canal de l'Ourcq dans l'intérieur de Paris, et devis détaillé de ces ouvrages, in-4., 1812 figures. 12 fr.
* — MÉMOIRE SUR LE CANAL DE SOISSONS destiné à joindre le canal de l'Ourcq aux canaux des Ardennes et de Saint-Quentin, in-4. avec une grande planche. 5 fr.
— DEVIS DES PONTS à bascule à construire sur le canal de l'Ourcq, in-4., fig, 1808. 6 fr.
* GINOT, DES ROIS (Mademoiselle). PLANISPHÈRE MOBILE, 3°. édition, tableau collé sur carton. 3 f. 50 c.
* — PLANÉTAIRES HÉLIOCENTRIQUE et géocentrique, 2°. édition, deux cartes collées sur carton ensemble. 7 fr.
* — CALENDRIER ASTRONOMIQUE PERPÉTUEL, indiquant le quantième des mois, les jours de la semaine, les phases de la lune, les éclipses, etc. Tableau collé sur carton. 5 fr.
GIROD-CHANTRANS. ESSAI SUR LA GÉOGRAPHIE PHYSIQUE, le climat et l'histoire naturelle du département du Doubs 2 vol. in-8. 10 fr.
GOUDIN (OEuvres de M. B.), contenant un Traité sur les PROPRIÉTÉS COMMUNES A TOUTES LES COURBES, un Mémoire sur les ÉCLIPSES DE SOLEIL, nouv. édit., in-4. 7 fr. 50 c.
GRAFF. Galerie des combinateurs à la loterie, in-8. 6 fr.
*GREMILLET. NOUVELLE THÉORIE DU CALCUL DES INTÉRÊTS simples et composés, des annuités, des rentes et des placemens viagers, etc., 1 vol. grand in-8., 1823. 7 f. 50 c.
* — RECUEIL DE PROBLÈMES amusans et instructifs, avec les démonstrations raisonnées, et l'application des règles de l'arithmétique à leurs solutions, etc, 2 vol. in-8. 11 fr.
Chaque volume se vend séparément, savoir :
Tome 1er, Questions, in-8. 5 fr.
Tome 2e. Solutions, in 8. 6 fr.
* GUEPRATTE. Instruction sur le PLANISPHÈRE CÉLESTE, à l'usage de la marine, et détermination des éclipses de lune, de soleil et des occultations d'étoiles, in 8., 1826, avec une très-grande carte. 12 fr.
HACHETTE, ex-Professeur à l'École Polytechnique. PROGRAMMES D'UN COURS DE PHYSIQUE, ou Précis des leçons sur les principaux phénomènes de la nature, et sur quelques applications des Mathématiques à la Physique, in-8., 1809. 5 fr. 50 c.
— TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DES MACHINES, nouvelle édit. augmentée, 1 vol. in-4., avec 32 planches, 1819. 25 fr
HAGEAU, inspecteur divisionnaire au corps des ponts et chaussées. DESCRIPTION du canal de jonction de la Meuse au Rhin, etc.; 1819, 1 vol. in-4., grand papier, et atlas composé de 21 pl. sur demi-feuille grand-aigle. 70 fr.
HASSENFRATZ. La SYDÉROTECHNIE, ou l'art de traiter le minérai de fer pour en obtenir la fonte du fer ou de l'acier, etc. 4 vol. in-4. avec 66 planches, 1811 80 fr
— COURS DE PHYSIQUE CÉLESTE, ou leçons sur l'exposition du système du monde, in-8, figures. 7 f. 50 c.
— Traité élémentaire et pratique de l'art de calciner la pierre-calcaire, etc., in-4. figures, 1825. 18 fr.
HATCHETT. EXPÉRIENCES NOUVELLES et Observations sur les différens ALLIAGES DE L'OR, leur pesanteur spécifique, etc, traduites de l'anglais par Lerat, contrôleur du monnayage à Paris, avec des Notes, par Guyton-Morveau, in-4. 9 fr.
HAUY. Membre de l'Académie Royale des Sciences, Professeur de minéralogie au Jardin du Roi, etc., etc. TRAITÉ DES CARACTÈRES PHYSIQUES DES PIERRES PRÉCIEUSES, pour servir à leur détermination lorsqu'elles ont été taillées, 1 vol. in-8., 1817, avec 3 pl en taille-douce. 6 fr.
— TABLEAU COMPARATIF DES RÉSULTATS DE LA CRISTALLOGRAPHIE et de l'analyse chimique, relativement à la classification des Minéraux, vol. in-8. 5 fr. 50 c.
— TRAITÉ DE MINÉRALOGIE, précédé d'un TRAITÉ DE CRISTALLOGRAPHIE, 2°. édition revue, corrigée et considérablement augmentée; 6 vol. in-8. et deux atlas; ensemble 204 pl. en taille-douce, 1822 et 1823. 90 fr.
Ces deux ouvrages se vendent séparément, savoir :
Traité de Minéralogie, 4 vol. in-8. et atlas de 120 planches in-4. 60 fr.
Traite de Cristallographie, 2 vol. in-8. et atlas de 84 planches in-4. 30 fr.
HAUY. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE PHYSIQUE, troisième édition, considérablement augmentée, adopté par le Conseil royal de l'Instruction publique, pour l'enseignement dans les colléges, 2 vol. in-8. avec 19 pl., 1821. 15 fr.
HERBIN DE HALLE. DES BOIS propres AU SERVICE DES ARSENAUX de la marine et de la guerre, etc., accompagné de 40 planches enluminées, représentant les arbres qui fournissent les diverses pièces de constructions, in-8, 1823. 9 fr.
HISTOIRE ET MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE PARIS, 167 vol. in-4., rel. 1500 fr.
Chaque volume, depuis 1666 jusqu'à 1790 (le dernier de cette collection), se vend séparément, 20 fr.
Table des matières contenues dans les Mémoires de l'Académie, 10 vol.; chaque vol. 15 fr.
— Savans étrangers, 11 vol.; chaque vol. 20 fr.
— Prix, tomes 7, 8 et 9, ensemble. 60 fr.
— Machines, 7 vol. 150 fr
— Le tome 7e, séparément. 36 fr.
HOMASSEL, Élève gagnant maîtrise, et ex-Chef des teintures de la Manufacture des Gobelins. COURS THÉORIQUE ET PRATIQUE SUR L'ART DE LA TEINTURE en laine, soie, fil, coton, fabrique d'Indienne en grand et petit teint, suivi de l'Art du Teinturier-Dégraisseur et du Blanchisseur, avec les expériences faites sur les végétaux colorans, 3°. édit., 1818, 1 vol. in-8. 5 fr.
*HUERNE DE POMMEUSE. DES CANAUX NAVIGABLES, considérés d'une manière générale, avec des recherches comparatives sur la navigation intérieure de la France et celle de l'Angleterre, 1 vol. in-4. et atlas. 25 fr.
HUTTON. NOUVELLES EXPÉRIENCES D'ARTILLERIE faites pendant les années 1787, 88, 89 et 91, où l'on détermine la force de la poudre, la vitesse initiale des boulets de canon, les portées des pièces à différentes élévations, la résistance que l'air oppose au mouvement des projectiles, les effets des différentes longueurs, des différentes charges de poudre, etc., etc.; trad. de l'anglais, par O. Terquem, prof. de mathématiques aux écoles royales, et bibliothécaire au dépôt central de l'artillerie, etc., 1826, in-4 avec planch. 10 fr.
— La 1re. partie traduite sur Villantroy, in-4., 1802. 7 fr. 50 c.
*INSTRUCTION SUR LA MANIÈRE DE SE SERVIR DE LA RÈGLE A CALCUL, instrument à l'aide duquel on peut obtenir à vue, sans plume, crayon, ni papier, le résultat de toutes espèces de calcul, avec 21 figures, représentant l'instrument dans les principales opérations. 2°. édition, corrigée et augmentée, in-12, 1825. 2 fr.
*INSTRUCTION DU CONSEIL DE SALUBRITÉ, SUR LA CONSTRUCTION DES LATRINES PUBLIQUES et sur l'assainissement des Fosses d'aisances; précédé du Rapport remis à Monsieur le Dauphin, Par un membre de la Société. *Imprimé par ordre du Conseil général de la Société royale des Prisons;* in-4., 1825, avec de très-grandes planches. 5 fr.
*JANVIER, *horloger ordinaire du Roi*. MANUEL CHRONOMÉTRIQUE, ou Précis de ce qui concerne le Temps, ses divisions, ses mesures, leurs usages, etc., vol. in-12, avec 5 planches, 1821. 4 fr.
JOURNAL DE PHYSIQUE, DE CHIMIE, D'HISTOIRE NATURELLE ET DES ARTS, 96 vol. in-4., avec beaucoup de planches. 1500 fr.
Chaque volume se vend séparément 18 fr.
— et chaque numéro. 4 fr.
JUVIGNY. MOYEN DE SUPPLÉER PAR L'ARITHMÉTIQUE A L'EMPLOI DE L'ALGÈBRE dans les questions d'intérêts composés, d'annuités, d'amortissemens, etc, terminé par une application spéciale du même procédé à l'extinction de la dette publique, in-8., 1825. 2 fr.
* — APPLICATION DE L'ARITHMÉTIQUE AU COMMERCE et à la banque, d'après les principes de Besout, ouvrage élémentaire, théorique et pratique, 3°. édit., deux parties en 1 vol. in 8., 1827. 7 fr.
* JOUANNO, *professeur de mathématiques au collége de Pontlevy*. ARITHMÉTIQUE ÉLÉMENTAIRE, théorique et pratique, in-8., 1826. 3 f. 50 c.
* JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE. *Voyez* ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
LABEY, ex-professeur à l'École-Polytechnique. TRAITÉ DE STATIQUE, vol. in-8. 3 fr. 50 c.
LA CAILLE. LEÇONS ÉLÉMENTAIRES DE MATHÉMATIQUES, augmentées par *Marie*, avec des Notes par M. Labey, Professeur de Mathématiques et Examinateur des Candidats pour l'École Polytechnique; Ouvrage adopté par l'Université, pour l'enseignement dans les Lycées, etc., in-8., fig., 1811. 6 fr. 50 c.
— LEÇONS D'OPTIQUE, augmentées d'un TRAITÉ DE PERSPECTIVE; nouvelle édition, in-8., 1808. 5 fr.
LACOUDRAYE. THÉORIE DES VENTS ET DES ONDES, in-8. 4 fr.
LACROIX, Membre de l'Institut et de la Légion-d'Honneur, etc. TRAITÉ DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DU CALCUL INTÉGRAL; 2°. édition, revue, corrigée et considérablement augmentée, 3 vol. in-4., avec 18 pl. 66 fr.
Le troisième volume se vend séparément, 26 fr.
L'Auteur a fait des changemens et augmentations considérables à cette nouvelle édition, qu'il a revue avec le plus grand soin.
— COURS DE MATHÉMATIQUES à l'usage de l'École centrale des Quatre Nations, Ouvrage adopté par le Gouvernement pour les Lycées, Écoles secondaires, Colléges, etc., 9 vol. in-8. 38 fr. 50 c.
Chaque volume du Cours de M. LACROIX *se vend séparément, savoir :*
— Traité élémentaire d'Arithmétique, 17°. édition, 1826. 2 fr.
— Élémens d'Algèbre, 14°. édit., 1825, 4 fr.
— Élémens de Géométrie, 13°. édit., 1825. 4 fr.
— Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et l'Application de l'Algèbre à la Géométrie, 7°. édit., 1822. 4 fr.
— Complément des Élémens d'Algèbre, 5°. édition, 1825. 4 fr.
— Complément des Élémens de Géométrie, ou Elémens de Géométrie descriptive, 5e édition, 1822. 3 fr.
— Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral, 3°. édition, 1820. 7 fr. 50 c.

LACROIX.—Essais sur l'Enseignement en général, et sur celui des Mathématiques en particulier, ou Manière d'étudier et d'enseigner les Mathématiques, 1 vol. in-8., seconde édition, revue et augmentée, 1816. 5 fr.

— TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DU CALCUL DES PROBABILITÉS, in-8., 2e. édition, avec une planche, 1822. 5 fr.

LAGRANGE, Sénateur, Grand Officier de la Légion-d'Honneur, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes de France, etc. LEÇONS SUR LE CALCUL DES FONCTIONS; nouv. édition, revue, corrigée et augmentée, in-8. 6 fr. 50 c.
Elles contiennent des formules et des méthodes nouvelles.

—DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES de tous les degrés, avec des Notes sur plusieurs points de la Théorie des équations algébriques, in-4.; 3e. édition, revue et corrigée. Ouvrage adopté par l'Université pour l'enseignement dans les Lycées, etc., 1826. 15 fr.
Cette 3e. édition est précédée d'une analyse de cet ouvrage, par M. Poinsot de l'*Institut*.

— THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES; nouvelle édition, revue, corrigée et augmentée par l'Auteur, in-4., 1813 15 fr.

— MÉCANIQUE ANALYTIQUE; nouvelle édition, revue et augmentée par l'Auteur, 2 vol. in-4., 1811 et 1815. 36 fr.
(*L'Auteur a fait des augmentations considérables à cette nouvelle édition.*)
— Le tome second se vend séparément, pour ceux qui ne l'ont pas retiré. 18 fr.
Lagrange a publié un grand nombre de Mémoires dans la collection des Mémoires de l'Académie des Sciences; quelques-uns se vendent séparément.

LAGRIVE. MANUEL DE TRIGONOMÉTRIE PRATIQUE, revu par les Professeurs du Cadastre, MM. Reynaud, Harros, Plausol et Boson, et augmenté des Tables des Logarithmes à l'usage des Ingénieurs du Cadastre, 1 vol. in-8. 7 fr.

LALANDE, Membre de l'Institut, Directeur de l'Observatoire. TABLES DES LOGARITHMES pour les nombres et les sinus, etc., revues par Reynaud, Examinateur des Candidats de l'École Polytechnique, PRÉCÉDÉES DE LA TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE, par le même; 1 vol. in-18, avec planches, 1818. 3 fr.
Les Tables de Logarithmes de LALANDE seules, sans la Trigonométrie de M. Reynaud, se vendent séparément. 2 fr.

—HISTOIRE CÉLESTE FRANÇAISE, in-4. 15 fr.

— BIBLIOGRAPHIE ASTRONOMIQUE, in-4. 30 fr.
Et les autres ouvrages du même auteur.

LAME, Élève Ingénieur au Corps royal des Mines. Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE; in-8., avec pl., 1818. 2 fr. 50 c.

LANCELIN. INTRODUCTION A L'ANALYSE DES SCIENCES, ou de la Génération des fondemens et des instrumens de nos connaissances, 3 vol. in-8., 1803, 15 fr.

LANZ et BETANCOURT. ESSAI SUR LA COMPOSITION DES MACHINES, 2e. édition, revue, corrigée et considérablement augmentée, vol. in-4. avec 13 gr. pl., 1819. 15 fr.

LAPEYROUSE (DE). TRAITÉ SUR LES MINES ET LES FORGES du comté de Foix, in-8., avec 6 grandes planches. 6 fr.

LAPIE. Atlas classique et universel de géographie ancienne et moderne, in-folio. 39 cartes, demi-reliure. 36 fr.

LAPLACE (M. le marq. de), Pair de France, Grand-Officier de la Légion-d'Honneur, Membre de l'Institut, du Bureau des Longitudes de France, des Sociétés royales de Londres, de Gottingue, etc.

— EXPOSITION DU SYSTEME DU MONDE, 5e. édition, revue et augmentée par l'Auteur, in-4, 1824, avec portrait, 15 fr.
— Le même ouvrage, 2 vol. in-8., sans port., 1824.

— THÉORIE analytique DES PROBABILITÉS, 1 vol. in-4., troisième édition, 1820, avec le 4e. supplément. 27 fr. 50 c.
— Quatrième Supplément à la Théorie des Probabilités, 1825, séparément. 2 fr. 50 c.

— ESSAI philosophique SUR LES PROBABILITÉS, 5e. édition, revue et augmentée, in-8., 1825. 4 fr.

— PRÉCIS DE L'HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE, 1 vol. in-8, 1821, 3 fr.

— TRAITÉ DE MÉCANIQUE CÉLESTE, 5 vol. in-4.
Les 3e., 4e. et 5e. volumes se vendent ensemble. 62 fr.
Les 4e. et 5e. volumes. 47 fr.
Le 5e. imprimé en 1825. 26 fr.
— Le même, 5 vol. in-4., grand papier vélin. 184 fr.

LAROUVRAYE (DE). L'ART DES COMBATS SUR MER, dédié au Duc d'Angoulême, in-4. avec pl. 6 fr.

LASALLE. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'HYDROGRAPHIE appliquée à toutes les parties du pilotage, etc. 1 vol. in-8., avec pl, 1817. 6 fr.

* LEBLANC, *dessinateur et graveur du Conservatoire des arts et métiers.* RECUEIL DE MACHINES, instrumens et appareils, qui servent à l'économie rurale, tels que charrues, semoirs, herses, moulins, presse hydrauliques et à vis, etc. Il en paraît 8 livraisons, grand-raisin in-folio. Prix de chaque livraison. 6 fr.

LEFÉBURE DE FOURCY (L.), *examinateur des aspirans à l'école polytechnique*, etc. LEÇONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, données au collége royal de Saint-Louis, dans lesquelles on traite des problèmes déterminés, de la ligne droite et des lignes du second ordre; in-8., fig., 1827. 5 f. 50 c.

LEFÈVRE, Géomètre en chef du Cadastre. NOUVEAU TRAITÉ DE L'ARPENTAGE, à l'usage des personnes qui se destinent à l'état d'arpenteur, au levé des plans et aux opérations du nivellement, *quatrième édition* entièrement refondue et augmentée d'un Traité de Géodésie pratique, ouvrage contenant tout ce qui est relatif à l'arpentage, l'aménagement des bois et la division des propriétés; ce qu'il faut connaître pour les grandes opérations géodésiques et le nivellement, 2 vol. in-8. avec 29 pl. nouvellement gravées, dont une color. pour les teintes conventionelles, 1826. 16 fr.

— MANUEL DU TRIGONOMÈTRE, servant de Guide aux jeunes Ingénieurs qui se désignent aux opérations géodésiques; suivi de diverses solutions de Géométrie pratique, de quelques Notes et de plusieurs Tableaux, 1 vol. in-8., avec planches; 1819. 5 fr.

* — ESSAI SUR L'ARPENTAGE PARCELLAIRE, ou recueil et développement des instructions et règlemens sur la partie d'art du cadastre, à l'usage des employés chargés du levé des plans parcellaires des communes et de leurs calculs, in-8., fig. et tabl. 6 fr.
Voyez le Supplément, page 12.

LEFRANÇOIS. ESSAIS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, 2e. édition, revue et augmentée, 1 vol. in-8., 1824. 2 fr. 50 c.

LEGENDRE, Membre de l'Institut et de la Légion-d'Honneur, Conseiller titulaire de l'Université. ESSAIS SUR LA THÉORIE DES NOMBRES, 2e édition, revue et considérablement augm., in-4., 1808, avec deux Supplémens, imprimés en 1816 et en 1825. 24 fr.
Le Supplément imprimé en 1816 se vend séparément. 3 fr.
Celui imprimé en 1825. 3 fr.
— Nouvelle Méthode pour la DÉTERMINATION DES ORBITES DES COMÈTES, avec deux Supplémens contenant divers perfectionnemens de ces Méthodes et leur application aux deux Comètes de 1805, 1806, in-4. 10 fr.
Le deuxième Supplément, 1820, se vend séparément. 4 fr.
— EXERCICES DU CALCUL INTÉGRAL sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures, 3 vol. in-4. avec les supplemens, 1811 à 1819. 72 fr.

LEGENDRE et DELAMBRE. Méthode analytique pour la détermination d'un arc du méridien, in-4. 9 fr.

LE NORMAND, professeur de technologie, etc. NOUVEAU MANUEL DE L'ART DU DÉGRAISSEUR, etc., ou Instruction sur les moyens d'enlever soi-même toutes sortes de taches; 3e. *édit.*, revue, corrigée et augmentée d'un *Appendice* sur la manière de blanchir le papier et d'enlever les taches d'encre, de graisse, de cire ou d'huile sur les livres et estampes, etc., 1 vol. in-12, avec une planche, 1826. 3 fr.

— L'ART DU DISTILLATEUR des eaux-de-vie et des esprits, 2 vol. in-8., fig., 1817. 18 fr.

* — Manuel de l'art du fabricant de verdet, in-8. 3 fr.

* LENORMAND et DEMOLÉON. DESCRIPTION DES EXPOSITIONS DES PRODUITS DE L'INDUSTRIE FRANÇAISE faites à Paris, depuis leur origine, jusques à celle de 1819 inclusivement, renfermant les noms et les adresses de tous les exposans, tant nationaux qu'étrangers, avec 84 planches, 4 vol. in 8., 1824. 36 fr.

LÉONARD DE VINCY ESSAI SUR SES OUVRAGES PHYSICO-MATHÉMATIQUES, avec des fragmens tirés de ses manuscrits apportés de l'Italie, par J.-B. Venturi, professeur de physique à Modène, in-4 2 f. 50 c.

LEPAUTE, Horloger du Roi. TRAITÉ D'HORLOGERIE, contenant tout ce qui est nécessaire pour bien connaître et pour régler les pendules et les montres, la description des pièces d'horlogerie les plus utiles, etc., vol. in-4., avec 17 pl. 24 fr.

* LHERMIER. CONSIDÉRATIONS SUR L'ÉTABLISSEMENT D'UNE USINE HYDRAULIQUE quelconque, précédées des considérations sur les moyens de faire produire à l'eau un effet maximum, dans les coursiers, par son choc sur les aubes, des roues hydrauliques, et calcul de la dépense d'eau d'une vanne, et suivies d'un mémoire sur les moulins à pilons, in-8., figures, 1826. 2 f. 50 c.

LEPAGE, *ancien avocat.* LOIS DES BATIMENS, ou le NOUVEAU Desgodets, traitant suivant les Codes civil et de procédure, des servitudes en général, des réparations, par vice de construction, accidens et vétusté, etc., 2 vol. in-8., 1826. 9 fr.

LHUILLIER, *membre de la Société d'Encouragement de Rouen.* QUELQUES IDÉES NOUVELLES SUR L'ART D'EMPLOYER L'EAU comme moteur des roues hydrauliques, in-8, 1823, fig. 2 fr. 50 c.

L'HUILLIER ET PETIT. DICTIONNAIRE DES TERMES DE MARINE ESPAGNOLS ET FRANÇAIS, in-8. 8 fr.

LIBES, Professeur de Physique au Lycée Charlemagne à Paris, etc. HISTOIRE PHILOSOPHIQUE DES PROGRÈS DE LA PHYSIQUE, 4 vol. in-8., 1811 et 1814. 20 fr.
Le quatrième volume se vend séparément. 5 fr.

—TRAITÉ COMPLET ET ÉLÉMENTAIRE DE PHYSIQUE, présenté dans un ordre nouveau, d'après les découvertes modernes; deuxième édition, revue, corrigée et considérablement augmentée, 3 vol. in-8., avec fig., 1813. 18 fr.

— LE MONDE PHYSIQUE et le MONDE MORAL, ou lettres à Mme. de ****, 2e. édition considérablement augmentée, 2 vol. in-8., 1822, figures. 15 fr.

— NOUVEAU DICTIONNAIRE DE PHY-

SIQUE, rédigé d'après les découvertes les plus modernes, 3 vol. in-8 et atlas. 24 fr.

MAGRÉ. LE PILOTE AMÉRICAIN, contenant la description des côtes orientales de l'Amérique du nord, depuis le fleuve Saint-Laurent jusqu'au Mississipi, et trad. de l'anglais, et publié par ordre du ministre de la marine, 1826, in-8. 5 fr.

* MAIRET, relieur et imprimeur lithographe. NOTICE SUR LA LITHOGRAPHIE, 2e. édition, suivie d'un essai sur la reliure et le blanchiment des livres et gravures, in-8., 1824, figures 5 fr.

* MALUS, Lieutenant-Colonel au Corps du Génie, Membre de l'Institut d'Égypte. THÉORIE DE LA DOUBLE RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE dans les substances cristallisées, in-4., avec pl. 12 fr.

MANSON. Traité du fer et de l'acier, in-4., 1804, 15 planches. 18 fr.

MARCEL DE SERRES. ESSAI SUR LES ARTS et les Manufactures d'Autriche, 1814, 3 vol. in-8, avec 34 planch., 21 fr.

MARIE, *Professeur de Mathématiques et de Topographie.* PRINCIPES DU DESSIN ET DU LAVIS DE LA CARTE TOPOGRAPHIQUE, présentés d'une manière élémentaire et méthodique, avec tous les développemens nécessaires aux personnes qui n'ont pas l'habitude du Dessin; accompagnés de 9 modèles, dont huit sont coloriés avec soin; 1 vol. in-4., oblong., 1825, 15 fr

MASCHERONI. PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE, résolus de différentes manières, traduit de l'italien, 1 vol. in-8., 1803. 3 fr.

MAUDUIT, Professeur de Mathématiques au Collége de France à Paris. LEÇONS ELÉMENTAIRES D'ARITHMÉTIQUE, ou Principes d'Analyse numérique, in 8., nouv. édition, 1803. 5 fr.

— LEÇONS DE GÉOMÉTRIE THÉORIQUE ET PRATIQUE, nouvelle édition, revue, corrigée et augmentée, 2 vol. in-8., 1817, avec 17 pl. 10 fr.

— INTRODUCTION AUX SECTIONS CONIQUES, pour servir de suite aux élémens de géométrie de M. Rivard, in-8. 3 fr.

MAZÉAS. Abrégé des élémens d'arithmétique, d'algèbre et de géométrie, etc., in-12. 3 fr.

MAYNIEL, Chef de bataillon au corps du Génie, sous-directeur des fortifications. TRAITÉ EXPÉRIMENTAL, ANALYTIQUE ET PRATIQUE DE LA POUSSÉE DES TERRES ET DES MURS DE REVÊTEMENT, contenant: 1°. l'Exposition et la Discussion des expériences anciennes et nouvelles sur la poussée des terres; 2°. l'Exposition et la Discussion des diverses théories sur la poussée des terres; 3°. la Comparaison des nouvelles expériences sur la théorie de Coulomb, généralisée, et application de cette théorie; 4°. Traité pratique sur la poussée des terres et des murs de revêtement; suivi d'un Appendice sur le frottement des vannes dans leurs coulisses, 1808, 1 vol. in-4. 12 fr.

MAZURE-DUHAMEL, *Conservateur de l'Observatoire de la Marine et Professeur à l'École de Navigation à Toulon.* MÉMOIRE SUR L'ASTRONOMIE NAUTIQUE, in-4, avec 2 pl. et tableaux. 7 fr. 50 c.

MÉMOIRES SUR LA TRIGONOMÉTRIE sphérique, par un Officier de l'Etat-Major, etc., in-8., 1 fr. 50 c.

MÉMOIRES DE L'INSTITUT,

Sciences physiques et mathématiques.

Tomes I, 18 fr.; II, 24; III, 18; IV, 18; V, 20; VI, 20; VII ou 1806, 24; VIII ou 1807, 20; IX ou 1808, 20; X ou 1809, 20; * XI ou 1810, 2 vol., 22; * XII ou 1811, 2 vol., 25; * XIII ou 1812, 2 vol., 22; * XIV ou 1813, 1814, 1815, 1 vol., 18; * Académie des Sciences, 1816, tomes I, 18; * 1817, II, 20; * 1818, III, 25; * IV ou 1819 et 1820, 30. V ou 1821 et 1822, 1823, 20.

Savans étrangers.

Tomes I, 36 fr.; II, 18.

— Ier. Nouvelle série, 1827. 20 fr.

Base du système métrique.

Tomes I, II, III, 100 fr.; IV, par Biot et Arago, 21.

Science morale et politique.

Tomes I, 18 fr.; II, 18; III, 18; IV, 18; V, 18.

Littérature et Beaux-Arts.

Tomes I, 20 fr.; II, 20; III, 20; IV, 20; V, 20.

Littérature ancienne.

Tomes * I et II, 42 fr.; * III et IV, 42; * V et VI, 48.

Prix total de la collection, telle qu'elle est indiquée ci-dessus. 895 fr.

* MÉMOIRE sur un nouveau système de guerre et de construction maritime et sur un nouveau moyen de navigation sans voiles; par J.-M. D. L. F., in-8., 1825. 2 f. 50 c.

* — Sur les moyens d'exploiter, par le Sénégal, les mines d'or de Bambouc, et de fonder un grand commerce avec l'Afrique intérieure, par J.-M. D. L. F., in-8., 1826. 1 f. 50 c

MOLLET, ex-Doyen de la Faculté des Sciences de Lyon, etc. GNOMONIQUE GRAPHIQUE, ou Méthode simple et facile pour tracer les Cadrans solaires sur toutes sortes de plans et sur les surfaces de la sphère, et du cylindre droit, sans aucun calcul, et en ne faisant usage que de la règle et du compas, *troisième édit.*, suivie de la Gnomonique analytique, etc., 1 vol., in-8, 1827, avec 8 planches. 3 fr.

MONGE (G.), ancien Sénateur, Membre de l'Institut. GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE; 5e. édit., augmentée d'une Théorie des Ombres et de la perspective, extraite des papiers de l'Auteur, par M. BRISSON, ancien Élève de l'École Polytechnique, Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées, 1 vol. in-4., avec 28 pl., 1827. 12 fr.

MONGE. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE STATIQUE, à l'usage des Écoles de la Marine, in-8., 6e. édition, revue par M. Hachette, ex-Instituteur de l'École Polytechnique. Ouvrage adopté par l'Université pour l'enseignement dans les Lycées, 1826. 3 fr. 50 c.

MONTEIRO-DA-ROCHA, Commandeur de l'Ordre du Christ, Directeur de l'Observatoire de l'Université de Coïmbre, etc. MÉMOIRES SUR L'ASTRONOMIE PRATIQUE, traduits du portugais par M. de Mello, in-4., 1808. 7 fr. 50 c.

MONTGÉRY (DE), Capitaine de frégate RÈGLES DE POINTAGE à bord des vaisseaux, ou Remarques sur ce qui est prescrit à cet égard, dans les exercices de 1808 à 1811; suivies de Notes sur diverses branches d'artillerie en général, et en particulier de l'artillerie de la Marine, 1 vol. in-8. 5 fr.

— MÉMOIRE SUR LES PÉTARDS FLOTTANS et sur les mines flottantes, ou machines infernales maritimes, br. in 8., 1819. 2 fr.

* — TRAITÉ DES FUSÉES DE GUERRE, nommées autrefois Rochettes, et maintenant fusées à la Congrève, in-8., 1825, figures. 6 fr.

MONTUCLA. HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES, dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours; où l'on expose le Tableau et le développement des principales découvertes dans toutes les parties des Mathématiques, les contestations qui se sont élevées entre les Mathématiciens, et les principaux traits de la vie des plus célèbres. *Nouvelle édition*, considérablement augmentée, et prolongée jusque vers l'époque actuelle, achevée et publiée par Jérôme de Lalande, 4 vol. in-4., avec figures. 60 fr.

Il reste encore quelques exemplaires des tom. III et IV, qui se vendent séparément des deux premiers vol. 40 fr.

Cet ouvrage est ce qui existe de plus complet jusqu'à présent en cette partie.

* MOREL (ALEX.) PRINCIPE ACOUSTIQUE nouveau et universel de la Théorie musicale, ou la Musique expliquée, 1 vol. avec pl., 1816. 7 fr.

* MORISOT. Tableaux détaillés des prix de tous les ouvrages de bâtiment, 7 vol. in-8. 58 fr.

Les 4 premiers volumes se vendent séparément, savoir:

Le 1er. 11 fr. 50 c.

Les 2e., 3e. et 4e. chacun. 8 50

Et les 5e., 6e. et 7e. ensemble. 21

MOULTESON. ARITHMÉTIQUE DES CAMPAGNES, à l'usage des écoles primaires, ouvrage adopté par le conseil royal de l'instruction publique, in-12, cartonné. 1 fr.

NEWTON. ARITHMÉTIQUE UNIVERSELLE, traduite en français par M. Beaudeux, avec des notes explicatives, 2 vol. in-4., 14 planches. 40 fr.

NICHOLSON. DESCRIPTION DES MACHINES A VAPEUR, et détail des principaux changemens qu'elles ont éprouvés depuis l'époque de leur invention, et des améliorations qui les ont fait parvenir à leur état actuel de perfection, ouvrage traduit de l'anglais, 1 vol. in-8. avec 8 pl., 1826. 5 fr.

NOEL. ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE raisonnée et appliquée, 2e édit., 1 vol. in-8., 1827. 6 fr.

NORIE. RECUEIL COMPLET DE TABLES UTILES A LA NAVIGATION. (*Voy.* VIOLAINE). 6 fr.

NOUVELLE THÉORIE DES PARALLÈLES avec un appendice contenant la manière de perfectionner la théorie des parallèles de A. M. Legendre, in-8. 2 fr.

OBEINHEIM (d'), ancien sous-directeur des fortifications, etc. BALISTIQUE, indication de quelques expériences propres à compléter la théorie du mouvement des Projectiles de l'Artillerie, etc. Strasbourg, 1814, in-8., avec 3 pl. 6 fr.

PAIXHANS, Élève de l'École Polytechnique, Chef de bataillon au Corps royal d'Artillerie, etc. NOUVELLE FORCE MARITIME et application de cette force à quelques parties du service de l'armée de terre, ou Essai sur l'état actuel des moyens de la force maritime; sur une espèce nouvelle d'artillerie de mer qui détruirait promptement les vaisseaux de haut bord; sur la construction de navires à voiles et à vapeur, de grandeur modérée, qui, armés de cette artillerie, donneraient une marine moins coûteuse et plus puissante que celle existante, et sur la force que le système des bouches à feu proposé offrirait à terre pour les batteries de siége, de place, de côtes et de campagne; in-4. avec 7 planches, 1822. 18 fr.

— EXPÉRIENCES FAITES PAR LA MARINE FRANÇAISE, sur une arme nouvelle, changemens qui paraissent devoir en résulter dans le système naval, et examen de quelques questions relatives à la Marine, à l'Artillerie, à l'attaque et à la défense des Côtes et des Places, in-8. 1825. 3 fr.

PARISOT. TRAITÉ DU CALCUL CONJECTURAL, ou l'Art de raisonner sur les choses futures et inconnues, in-4., 1810. 15 fr.

PAUCTON. TRAITÉ DE MÉTROLOGIE, ou Traité des Mesures, Poids et Monnaies des anciens et des modernes, in-4. 18 fr.

PECLET, *professeur au collége de Marseille, chargé des cours publics de physique et de chimie appliquées aux arts*, etc. COURS DE CHIMIE, 1 fort volume in-4. avec 9 planches. 36 fr.

— COURS DE PHYSIQUE, 1 fort vol. in-4. avec 24 planches. 36 fr.

PERSON. RECUEIL DE MÉCANIQUE ET DESCRIPTION DE MACHINES RELATIVES A L'AGRICULTURE ET AUX ARTS, in-4., avec 18 pl., 1802. 10 fr.

PERTUSIER, officier d'artillerie de la garde royale. LA FORTIFICATION ordonnée d'après les principes de la Statique et de la Balistique modernes, etc. 1822, in-8. avec atlas. 25 fr.

Cet ouvrage n'a été tiré qu'à 400 exemp., 123 seulement ont été livrés au commerce.

— La Moldavie et la Valachie, et de l'influence politique des Grecs du Fanal, in-8., 1822. 3 fr.

POINSOT, Membre de l'Institut et de la Légion-d'Honneur, Inspecteur-général de l'Université, Examinateur d'admission à l'École Polytechnique et à l'École spéciale militaire de Saint-Cyr, etc. TRAITÉ ELÉMENTAIRE DE STATIQUE, adopté pour l'Instruction publique, in-8., 4e. édit., 1821, avec pl. 5 fr.

— MÉMOIRE SUR L'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA THÉORIE DES NOMBRES, in-4., 1819. 3 fr.

— RECHERCHES SUR L'ANALYSE DES SECTIONS ANGULAIRES, in-4., 1825. 5 fr.

POISSON, Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique, etc. TRAITE DE MÉCANIQUE, 2 vol. in-8., avec 8 pl., 1811. 12 fr.

* POMMIÉS. MANUEL DE L'INGÉNIEUR DU CADASTRE, contenant les connaissances théoriques et pratiques utiles aux Géomètres en chef et à leurs collaborateurs, pour exécuter le levé général du plan des communes de France, conformément aux instructions du Ministre des Finances sur le cadastre de France; précédé d'un Traité de Trigonométrie rectiligne, par A.-A. Reynaud, vol. in-4., 1808. 12 fr.

PONCELET, ancien élève de l'École Polytechnique, capitaine au corps royal du Génie. TRAITÉ DES PROPRIÉTÉS PROJECTILES DES FIGURES, ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la Géométrie descriptive, et d'opérations géométriques sur le terrain, in-4., 1822. 16 fr.

* — MÉMOIRE SUR LES ROUES HYDRAULIQUES VERTICALES à aubes courbes, mues par dessous, suivi d'expériences sur les effets mécaniques de ces roues, in-4, figures, 2e. édit., 1827. 7 fr.

POULLET-DELISLE, Professeur de mathématiques au Lycée d'Orléans. APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMETRIE, in-8., 1806. 5 fr.

— RECHERCHES ARITHMÉTIQUES, trad. du latin de GAUSS, in 4. 18 fr.

PRONY, Membre de l'Institut. LEÇONS DE MÉCANIQUE ANALYTIQUE, données à l'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 2 vol. in-4., 1815. 30 fr.
Le même ouvrage, 2 vol. in-4., grand papier, 36 fr.

— Et les autres ouvrages du même auteur.

* PROUST. Recueil de Mémoires relatifs à la poudre à canon; extrait du Journal de Physique, in-4. 18 fr.

PUISSANT, Officier supérieur, Chef des études à l'École d'Application des Ingénieurs Géographes, etc. RECUEIL DE DIVERSES PROPOSITIONS DE GÉOMÉTRIE, résolues ou démontrées par l'analyse, 3e. *édit.*, augmentée d'un précis sur le LEVÉ DES PLANS, in-8., avec pl. 1824. 7 fr.

— TRAITÉ DE GÉODÉSIE, ou exposition des Méthodes trigonométriques et astronomiques applicables, soit à la mesure de la Terre, soit à la confection du canevas des cartes et des Plans topographiques, 2e. éd., 2 vol. in-4., formant ensemble plus de 800 p., avec 13 pl., 1819. 30 fr.

— MÉTHODE GÉNÉRALE pour obtenir le résultat moyen dans une série d'observations astronomiques faites avec le cercle répétiteur de Borda, in-4., 1823. 6 fr.

— TRAITÉ DE TOPOGRAPHIE, d'Arpentage et de Nivellement, 2e. édit., considérablement augmentée, 1 vol. in-4., avec 9 pl. gravées par M. Adam. 20 fr.

— Principes du figuré du terrain et lavis sur les plans et cartes topographiques, susceptibles de servir de base à l'enseignement du dessin dans les écoles, des services publics et comparaison des différens modes proposés à ce sujet; in-8., figures 3 f. 50 c.

QUARTIER DE RÉDUCTION et astronomique en usage dans la Marine, en feuille. 60 c. collé sur carton. 1 fr. 50 c.

* QUINET, *ancien commissaire des guerres.* MÉMOIRE POUR L'EXPOSÉ DES VARIATIONS MAGNÉTIQUES et athmosphériques du globe terrestre, avec des tables de la déclinaison et de l'inclinaison de l'aiguille aimantée sur toute la terre, présenté au bureau des Longitudes, in-8., 1826. 4 f. 50 c.

RAMOND, Mémoire sur la formule barométrique de la mécanique céleste et les dispositions de l'atmosphère, qui en modifient les propriétés, etc., in-4., 1811. 12 fr.

RAMSDEN. DESCRIPTION D'UNE MACHINE pour diviser les instrumens de mathématiques, traduit de l'anglais par Lalande, 1770, in-4., grand papier, fig. 6 fr.

RAVINET, *sous-chef à la division générale des Ponts-et-Chaussées.* DICTIONNAIRE HYDROGRAPHIQUE DE LA FRANCE, contenant la description des rivières et canaux flottables et navigables dépendans du domaine public, avec un tableau synoptique, indiquant le système général de la navigation intérieure; ouvrage couronné par l'Académie royale des Sciences; suivi de la Collection complète des Tarifs des Droits de Navigation; 2 vol. in-8. avec une très-grande Carte de la Navigation intérieure, publiée par la Direction des Ponts-et-Chaussées. 15 fr.
Le tome deuxième, contenant les lois, règlemens, etc., relatifs à la Navigation, se vend séparément. 8 fr.

RAIMOND. Lettre à M. Villoteau, touchant ses vues sur la possibilité et l'utilité d'une théorie exacte des PRINCIPES NATURELS DE LA MUSIQUE, etc., in-8., 1811. 4 fr.

— Essai sur la détermination DES BASES PHYSICO-MATHÉMATIQUES DE L'ART MUSICAL, etc., in-8., 1813. 2 fr.

RECUEIL COMPLET DE TABLES UTILES A LA NAVIGATION (*Voyez* Violaine), in-8. 9 fr.

REBOUL. (Antoine-Joseph) TABLES NOUVELLES DE VÉNUS, d'après la Théorie de M. de Laplace, et d'après les Élémens de M. de Lindeneau, in-4., 1811. 5 fr.

— NOTES SUR LA NAVIGATION DE BEZOUT, in-8. 3 fr.

REYNAUD, Examinateur des Candidats de l'École Polytechnique. ARITHMÉTIQUE, à l'usage des élèves qui se destinent à l'École Polytechnique et à l'École Militaire, 14e. édition, augmentée d'une Table des Logarithmes des nombres entiers, depuis un jusqu'à dix mille, 1 vol. in-8., 1827. 4 fr. 50 c.

— TRAITÉ D'ALGÈBRE, à l'usage des élèves qui se destinent à l'École Polytechnique et à l'école spéciale Militaire, 1 vol. in-8., 6e. édit. *Sous presse* :

— ALGÈBRE, ancienne édit., 2e. section, 1 vol. in-8., 1810. 5 fr.

— TRAITÉ DE L'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE ET DE TRIGONOMÉTRIE, à l'usage des élèves qui se destinent à l'École Polytechnique; 1 vol. in-8. avec 10 pl., 1819. 6 fr.

— COURS ÉLÉMENTAIRE DE MATHÉMATIQUES, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE, à l'usage des élèves qui se destinent à subir les examens pour le Baccalauréat ès-lettres, 1 vol. in-8., 1824. 6 fr.

— TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE, 3e. édit., suivie des TABLES DES LOGARITHMES des nombres et des lignes trigonométriques de LALANDE, in-18 avec fig., 1818. 3 fr.
Les Tables de Logarithmes de LALANDE seules, sans la Trigonométrie, se vendent séparément. 2 fr.

— ARITHMÉTIQUE à l'usage des Ingénieurs du Cadastre, in-8. 5 fr.

REYNAUD. MANUEL de l'Ingénieur du Cadastre; par MM. Pommiés et Reynaud; in-4. 12 fr.

— TRAITÉ DE TRIGONOMÉTRIE de Lagrive, avec les notes de Reynaud, in-4. 7 fr.

— ET DUHAMEL. PROBLÈMES ET DÉVELOPPEMENS sur les diverses parties des mathématiques, in-8. avec 11 pl., 1823. 6 fr.

— NOTES SUR L'ARITHMÉTIQUE DE BEZOUT, 11e. édit.; in-8., 1823. 2 fr. 50 c.

— SUR LA GÉOMÉTRIE, in-8., 1825. 4 fr.

— SUR L'ALGÈBRE, et application de l'Algèbre à la Géométrie; in-8., 1823. 4 fr.

RIVARD. TRAITÉ DE LA SPHÈRE ET DU CALENDRIER; 7e. édit, (faite sur la 6e. donnée par M. Lalande), revue et augmentée de notes et addit., par M. Puissant, officier supérieur; 1 vol. in-8., avec 3 pl. bien gravées, 1816. 4 fr.

ROMME, Associé de l'Institut de France. TABLEAUX DES VENTS, DES MARÉES ET DES COURANS qui ont été observés sur toutes les mers du globe, avec des réflexions sur ces phénomènes, 2 vol. in-8., 1817. 12 fr.

RUGGIÉRI. ÉLÉMENS DE PYROTECHNIE divisés en cinq parties: la 1re., contenant le Traité des matières; la 2e. les feux de terre, d'air et d'eau; la 3e., les feux d'aérostation; la 4e., les feux de théâtre et les feux de guerre; suivis d'un Vocabulaire et de la Description de quelques feux d'artifices, etc.; 2e. édit. revue, corrigée et augmentée de nouvelles découvertes et inventions faites par l'auteur, telles que les beaux feux verts, baguettes détonantes pour éviter la chute dangereuse des fusées volantes, etc., 1 vol. in-8. avec 28 pl., 1821. 9 fr.

— PYROTECHNIE MILITAIRE, 1812, 1 vol. in-8. avec pl. 6 fr.

* SAVARY. MÉMOIRE SUR L'APPLICATION DU CALCUL aux phénomènes électro-dynamiques, in-4., figures, 1823. 3 fr.

SCHWAB. ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE. 1re. partie, *géométrie plane*, in-8., 1823. 2 f. 50 c.

* SÉANCES DE L'ÉCOLE NORMALE, nouvelle édition, 13 vol. in-8. et 1 vol. de planches. 50 fr.

* SEGUIN *d'Annonay*. DES PONTS EN FIL DE FER, 2e. édition, in 4., 1826, figures. 5 fr.

* — MÉMOIRE SUR LE CHEMIN de fer de Saint-Etienne à Lyon par Saint-Chamond, Rive-de-Gier et Givors, in-4., figures, 1826. 3 fr.

SÉGUIN. MANUEL D'ARCHITECTURE, ou Principes des Opérations primitives de cet Art, où l'on expose des Méthodes abrégées tant pour l'évaluation des surfaces et solides circulaires que pour le développement des courbes, et pour l'extraction des racines carrées et cubiques, par de nouvelles règles fort simples. Cet ouvrage est terminé par une table des carrés et des cubes, dont les racines commencent par l'unité et vont jusqu'à dix mille. In-8., avec 10 pl. 6 fr.

— TABLES DES NOMBRES CARRÉS ET CUBIQUES, et des racines de ces nombres, depuis un jusqu'à dix mille. 3 fr.

SERVOIS. SOLUTIONS PEU CONNUES de différens problèmes de Géométrie pratique, 1 vol. in-8. 2 fr. 50 c.

SGANZIN, Inspecteur général des Ponts et Chaussées, etc. PROGRAMMES OU RÉSUMÉS DES LEÇONS D'UN COURS DE CONSTRUCTION, avec des Applications tirées principalement de l'Art de l'Ingénieur des Ponts et Chaussées, 3e. édition, revue et considérabl. aug., 1 vol. in-4, 1821 avec 10 pl. 15 fr.

SIMONIN. TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE DÉCIMALE, 1 vol. in-8. 2 fr.

SYLVESTRE. TRAITÉ D'ARITHMÉTI-

QUE à l'usage des Pensionnats et des Écoles Chrétiennes, 3e. édit., 1822. 5 fr.

SIMMENCOURT. TABLEAUX DES MONNAIES de change et des monnaies réelles, des poids et mesures, des cours des changes et des usages commerciaux des principales villes du monde, ou Répertoire du banquier, in-4., 1817. 3 fr.

SINGER (George). ÉLÉMENS D'ÉLECTRICITÉ ET DE GALVANISME, traduit de l'anglais par THILLAYE, Professeur au collége Louis-le-Grand, 1 fort vol. in-8., 1816. 8 fr.

SMEATON. (*Voyez* GIRARD.)

SOULAS. LA LEVÉE DES PLANS ET L'ARPENTAGE RENDUS FACILES, précédés de notions élémentaires de Trigonométrie rectiligne à l'usage des employés au Cadastre de la France, deuxième édition, revue et corrigée, 1 vol. in-8., 1820, avec 8 pl. 3 fr.

STAINVILLE (De), Répétiteur à l'École Polytechnique. MELANGES D'ANALYSE ALGÉBRIQUE ET DE GÉOMETRIE, 1 vol. in-8. de 600 pages, 1815, avec 3 pl. 7 fr. 50 c.

STIRLING. ISAACI NEWTONI ENUMERATIO LINEARUM TERTII ORDINIS, sequitur illustratio ejusd. tractatûs, in-8. 7 fr. 50 c.

SUZANNE, Docteur ès-Sciences, Professeur de Mathématiques au Lycée Charlemagne à Paris, etc. DE LA MANIÈRE D'ÉTUDIER LES MATHEMATIQUES; Ouvrage destiné à servir de guide aux jeunes gens, à ceux surtout qui veulent approfondir cette science, ou qui aspirent à être admis à l'École Normale ou à l'École Polytechnique, 3 vol. in-8., avec fig.

Chaque partie se vend séparément : savoir,

— 1re. *Partie*. PRÉCEPTES GÉNÉRAUX ET ARITHMÉTIQUE, seconde édition, considérabl. aug., in-8. 6 fr

— 2e. *Partie*. ALGÈBRE, épuisée, in-8. *ne se vend plus séparément.*

— 3e. *Partie*. GEOMÉTRIE, in-8. 6 fr. 50 c.

TEDENAT, Recteur de l'Académie de Nîmes. Leçons élémentaires D'ARITHMÉTIQUE et D'ALGÈBRE, in-8. 5 fr.

—Leçons élémentaires de GÉOMÉTRIE, in-8. 5 fr.

— Leçons élémentaires d'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE, et Calculs différentiel et intégr., 2 vol. in-8., 10 fr.

* TISSERAND. Traité d'arithmétique algébrique, in-8., 1823. 5 fr.

THEVENEAU, COURS D'ARITHMÉTIQUE à l'usage des Écoles centrales et du Commerce, in-8. 3 fr.

THIOUT aîné, maître horloger à Paris. TRAITÉ D'HORLOGERIE MÉCANIQUE ET PRATIQUE, approuvé par l'Acad. royale des Sc., 2 vol. in-4., avec 91 pl. 36 fr.

* TRAITÉ DE GÉODÉSIE PRATIQUE, contenant de nouvelles méthodes à l'usage des arpenteurs et des géomètres du cadastre, suivi d'un recueil de lois et de diverses formules et procès verbaux, concernant le ministère des arpenteurs, in-8., 1827, figur. 2 f. 50 c.

TREDGOLD (Thomas), Ingénieur civil, Membre de l'institution des Ingénieurs civils. ESSAI PRATIQUE SUR LA FORCE DU FER COULÉ ET D'AUTRES MÉTAUX, destiné à l'usage des ingénieurs, des maîtres de forges, des architectes, des fondeurs, et de tous ceux qui s'occupent de la construction des machines, des bâtimens, etc., contenant des règles pratiques, des tables et des exemples, le tout fondé sur une suite d'expériences nouvelles, et une table étendue des propriétés de divers matériaux; traduit de l'anglais, sur la deuxième édition, par T. DUVERNE. 1 vol. in-8. avec planch., 1826. 6 fr.

TRÉDGOLD. PRINCIPES DE L'ART DE CHAUFFER ET D'AÉRER LES ÉDIFICES PUBLICS, les Maisons d'habitation, les Manufactures, les Hôpitaux, les Serres etc., et de construire les Foyers, les Chaudières, les Appareils pour la vapeur, les Grilles, les Étuves, démontrés par le Calcul et appliqués à la Pratique; avec des remarques sur la nature de la Chaleur et de la Lumière, et plusieurs Tables utiles dans la Pratique; trad de l'anglais sur la 2e. édit., par Th. DUVERNE. 1 vol. in-8., avec planch. 1825. 7 fr.

— TRAITÉ PRATIQUE sur les chemins en fer et sur les voitures destinées à les parcourir; principes d'après lesquels on peut évaluer leur force, leurs proportions et la dépense qu'ils nécessitent; ainsi que leur produit annuel; conditions à remplir pour les rendre utiles, économiques et durables; théorie des chariots à vapeur, des machines stationnaires, et de celles où l'on emploie le gaz. Leur effet utile et les frais qu'elles occasionent. Orné de planches, et contenant beaucoup de tables, in-8. 1826. 5 fr.

TREUIL, Professeur à l'École militaire de Saint-Cyr. ESSAIS DE MATHÉMATIQUES, contenant quelques détails sur l'Arithmétique, l'Algèbre, la Géométrie et la Statique, in-8., 1819. 2 fr.

* TRISTAN (*comte de*). Recherches sur quelques effluves terrestres, in-8., 1826. 6 fr.

* VALLÉE, ancien élève de l'École Polytechnique, Ingénieur au Corps royal des Ponts-et-Chaussées. TRAITÉ DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, dédié à M. MONGE. (Ouvrage sur lequel l'Institut de France a fait un rapport très-avantageux.) 2e. édit., 1 vol. in-4., avec un atlas de 67 pl., 1825. 20 fr.

*—TRAITÉ DE LA SCIENCE DU DESSIN, contenant la théorie générale des ombres, la perspective linéaire, la théorie des images d'optique, et la perspective aérienne appliquée au lavis; pour faire suite à la Géométrie descriptive; 1 vol. in-4., avec un atlas de 56 pl., 1821. 20 fr.

VAN-BEEK. De l'influence que le fer des vaisseaux exerce sur la boussole, et un moyen d'estimer la déviation que l'aiguille éprouve de ce chef, trad. du hollandais; par M. Lipkins; in-8. 2 fr. 50 c.

VASTEL. ARITHMÉTIQUE DU JEU DE BOSTON, ou Chances Bostoniennes, in-12. 1 fr. 50 c.

— ART DE CONJECTURER, traduit du latin de J. Bernouilly, avec des observations, éclaircissemens et additions, in-4°. 7 f. 50 c.

WATIN. L'ART DU PEINTRE, doreur et vernisseur, nouvelle édition, augmentée de l'art du fabricant de couleurs, par BOURGEOIS, in-8., 1823. 5 fr

* VINCENT, *professeur de mathématiques spéciales*. COURS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, à l'usage des élèves qui se destinent à l'école polytechnique et à l'école militaire, in-8., 1826, figures. 6 fr.

VIOLAINE. RECUEIL DES TABLES UTILES A LA NAVIGATION, traduit de l'anglais de John William NORIE, professeur d'Hydrographie à Londres; précédé d'un ABRÉGÉ DE NAVIGATION PRATIQUE, contenant ce qui est nécessaire et indispensable à toutes les classes de marins; enrichi de plus, d'un VOCUBULAIRE des termes les plus usités dans la MARINE; le tout extrait des meilleurs Auteurs français, anglais, espagnols, etc; recueilli, mis en ordre et augmenté de Remarques et Observations nouvelles, par P. A. VIOLAINE, ex-Commissaire de Marine, Professeur de Mathématiques et de Navigation, etc.; 1 vol. in-8., 1815. 9 fr.

VISCONTI. MUSÉE PIE CLÉMENTIN, 8 vol. in-8., contenant chacun un grand nombre de planches. 250 f.

VOIRON. HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE depuis 1781 jusqu'à 1811, pour servir de suite à l'Histoire de l'Astronomie de Bailly, in-4., 1811. 12 fr.

(Cet ouvrage est indispensable aux personnes qui possèdent les 5 volumes de l'Astronomie de Bailly.)

WILLAUMEZ, vice-amiral. DICTIONNAIRE DES TERMES DE MARINE, nouvelle éd. revue et considérablement augmentée, 1825, vol. in-8., avec pl. dessinées et gravées par Baugeau. 12 fr.

— Le même, avec 157 pavillons. 15 fr.

Les 157 pavillons coloriés se vendent séparément. 3 fr.

SUPPLÉMENT.

LEFÈVRE, *ingénieur en chef du cadastre*. APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE à la mesure des lignes inaccessibles, et des surfaces planes, etc., ou longiplanimètre pratique, in-8., 5 figures. 1827. 5 fr.

VOYAGE MÉTALLURGIQUE EN ANGLETERRE, ou Recueil de mémoires sur le gisement, l'exploitation et le traitement des minérais d'étain, de cuivre, de plomb, de zinc, et de fer, dans la Grande-Bretagne, par M. DUFRENOY ET ELIE DE BEAUMONT, ingénieurs des mines. 1 fort vol. in-8. avec 17 planches. 1827. 12 fr. 50 c.

* D'ARCET. DESCRIPTION D'UNE SALLE DE BAINS, présentant l'application des perfectionnemens et des appareils accessoires convenables à ce genre de constructions; in-4., 1827, fig. 2 fr.

* — INSTRUCTION RELATIVE A L'ART DE L'AFFINAGE, rédigé au nom du conseil de salubrité de la ville de Paris et du département de la Seine; in-4., 1827, avec 3 grandes planches. 3 fr.

* LAURENT, peintre, ancien élève de l'école Polytechnique, professeur de dessin à l'école royale forestière de Nancy. THÉORIE DE LA PEINTURE, *première partie*, TRAITÉ DE PERSPECTIVE LINÉAIRE à l'usage des artistes; in-8., 1827, fig. 4 fr.

* THOUIN (André), membre de l'Institut, professeur de culture au Muséum d'histoire naturelle, etc. Cours de culture et naturalisation des végétaux, 3 vol. in-8., et atlas de 65 planches in-4. 1827. 35 fr.

SOUS PRESSE :

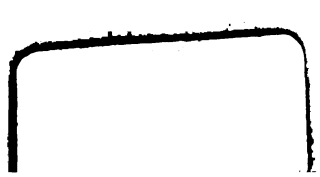
CONNAISSANCE DES TEMPS pour 1830.

APPLICATION DE L'ANALYSE A LA GÉOMÉTRIE, à l'usage de l'École polytechnique, par MONGE, 5e. édition, in-4.

ESSAI SUR L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES, suivi de notices sur quelques géomètres célèbres, par M. LACROIX, *membre de l'Institut*, in-8.

GÉOMÉTRIE DU COMPAS, par Mascheroni, 2e. édition, in-8., figures.

TRAITÉ DES MACHINES A VAPEUR, traduit de l'anglais de Trégold, etc. 1 vol. avec planches.

IMPRIMERIE DE FAIN, RUE RACINE, N°. 4, PLACE DE L'ODEON.

SEP 11 1928